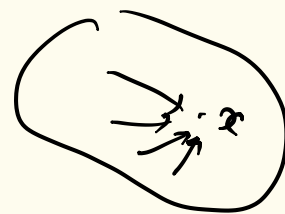
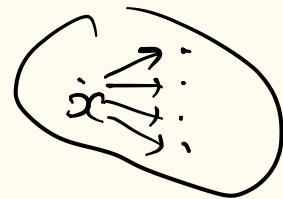


Инициальные и терминальные объекты

def $\mathcal{C}$ категория, $x \in \mathcal{C}$

- x @ инициальным, если $\forall y \in \mathcal{C} \exists! x \xrightarrow{!} y$
- x @ терминальным, если $\forall y \in \mathcal{C} \exists! y \xrightarrow{!} x$
- x @ нулевым, если он инициальный и терминальный



ex Set $\emptyset$ инициальный
 $\underline{1}$ терминальный

ex Set_* $\underline{1}$ нулевой объект

ex $\text{Set}_{\neq \emptyset} \subseteq \text{Set}$

есть терминальный
нет инициального

ex Grp $\underline{1}$ нулевой объект

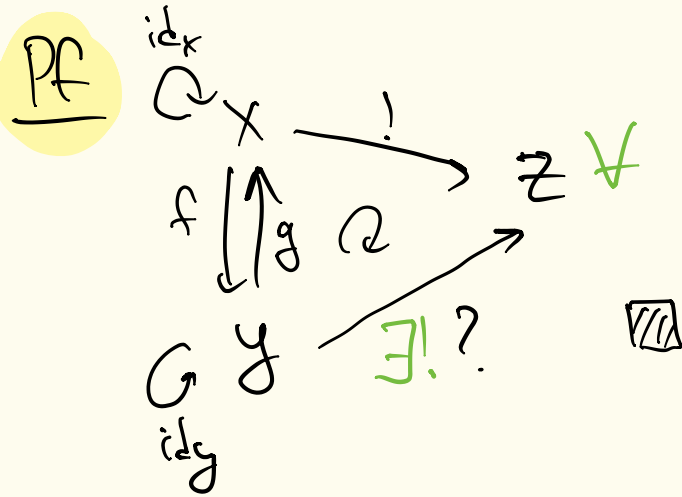
ex $\text{Ring} \supseteq \text{CRing}$ (коммутативные)

$(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, -)$

0 терминальный объект

$\mathbb{Z}$ инициальный объект $\mathbb{Z} \xrightarrow{!} \mathbb{R}$

УТВ $x \in C$ уникальный, $y \in C$ $y \cong x$ $\left(\exists x \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} y \right)$
 $fg = id_y, gf = id_x$
 $\Rightarrow y$ уникальный



УТВ $x, x' \in C$ уникальные
 $\Rightarrow \exists! x \xrightarrow{\cong} x'$

Pf $x \begin{matrix} \xrightarrow{\exists} \\ \xleftarrow{\exists} \end{matrix} x' \quad \square$

Мономорфизмы и эпиморфизмы

в Set $X \xrightarrow{f} Y$
 отображ. мн-в

$\begin{matrix} \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{f} \end{matrix} X \xrightarrow{f} Y$
 $f \circ x = f \circ y \Rightarrow x = y$

f @ инъективным, если
 $\forall x, y \in X \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

f @ сюръективным, если
 $\forall y \in Y \exists x \in X \text{ т.ч. } f(x) = y$

def $X \xrightarrow{f} Y \in C$ (a) **мономорфизм**, если

$$\forall z \in C \quad \forall z \begin{matrix} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{matrix} X \quad f \circ \varphi = f \circ \psi \Rightarrow \varphi = \psi$$

$$\left(\begin{matrix} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{matrix} \xrightarrow{f} \right)$$

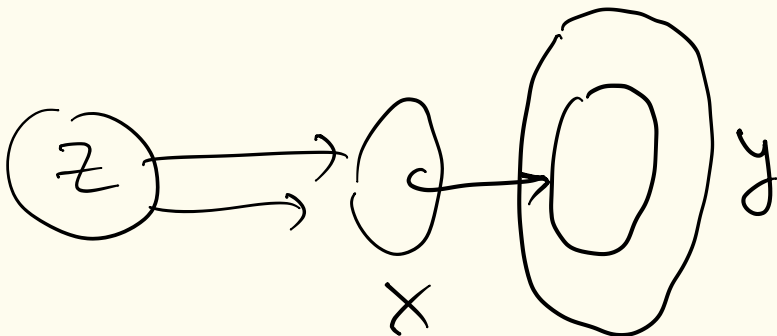
(b) **эпиморфизм**, если

$$\forall z \in C \quad \forall y \begin{matrix} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{matrix} Y \quad \varphi \circ f = \psi \circ f \Rightarrow \varphi = \psi$$

$$\left(X \xrightarrow{f} Y \begin{matrix} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{matrix} Z \right)$$

ex в Set моно = инъекции

- моно $\Rightarrow$ инъективность
- инъективность $\Rightarrow$ моно



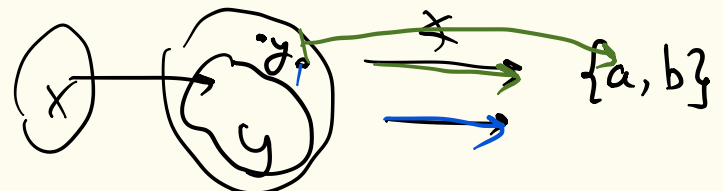
ex в Set эпн = сюръекции

- сюр. $\Rightarrow$ эпн

$$X \xrightarrow{f} Y \xRightarrow{\forall} Z$$

- эпн $\Rightarrow$ сюр.

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \exists y_0 \in Y \setminus f(X)$$



ex Grp

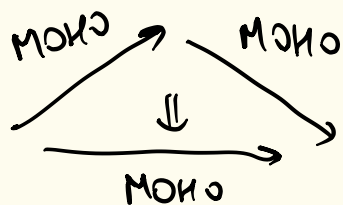
моно = инъективные
гомоморфизмы

эпи = сюръективные гомоморфизмы
(не просто!)

ex изом $\subseteq$ моно $\cap$ эпи (= биморфизмы)

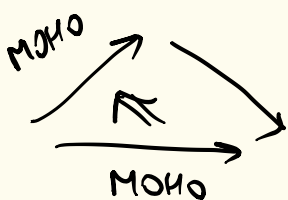
Утв

композиция моно — моно
(эпи) — (эпи)

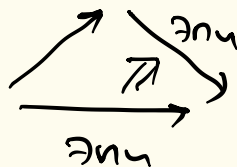


□

Утв



□



ex Ring

моно = инъективные
гомоморфизмы

эпи = ??? (не просто)

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

— биморфизм (моно + эпи)

$\mathcal{C}$ категория

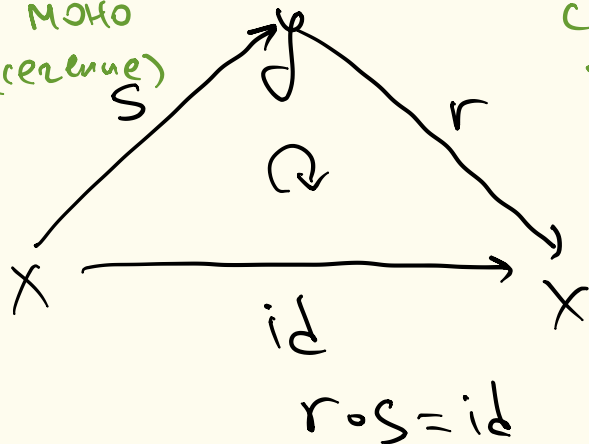
• $X \in \mathcal{C}$ X инициальный
 $\iff X$ терминальный в $\mathcal{C}^{\text{op}}$

• $f \in \text{Mor } \mathcal{C}$ моно в $\mathcal{C}$
 $\iff f$ эпи в $\mathcal{C}^{\text{op}}$

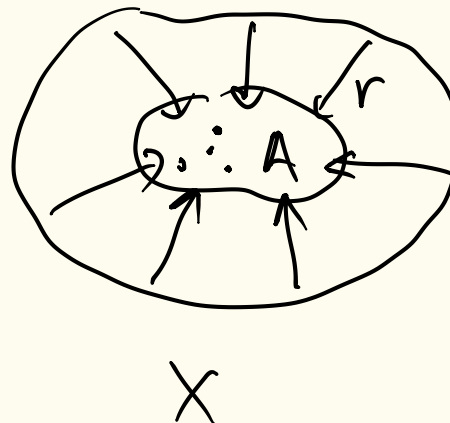
$$\text{Cat} \xrightarrow{\text{op}} \text{Cat}$$

— изоморфизм

сплит
моно
(сечение)



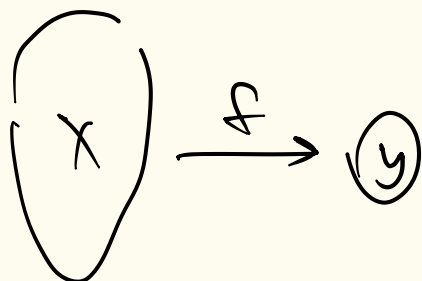
сплит
эпи
(ретракция)



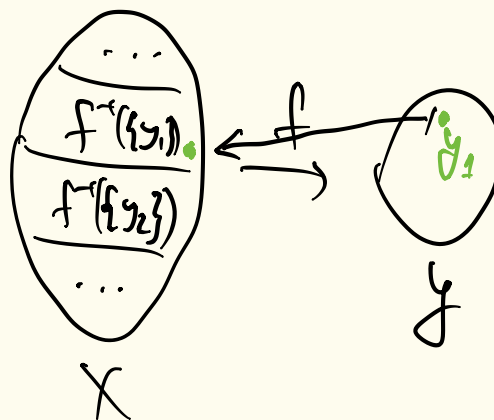
ex

в Set эпи = сплит
эпи

($\Leftrightarrow$ аксиомы выбора, т.е. $\subseteq$ в ZFC)

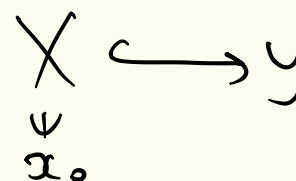


$$\forall y \in Y \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$



ex

потому все моно расщепимы



инъекция
(моно)

(кроме $\emptyset \hookrightarrow X \neq \emptyset$)

моно $\supset \dots \supset$ сплит моно

эпи $\supset \dots \supset$ сплит эпи

Естественные преобразования

def $F, G: C \rightarrow D$

$\alpha: F \Rightarrow G$

$\alpha: \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Mor}(D)$ т.е.
 $x \mapsto \alpha_x$

1) $\text{dom}(\alpha_x) = Fx$, $\text{cod}(\alpha_x) = Gx$

2) $\forall x \xrightarrow{\varphi} x' \text{ в } C$

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{F\varphi} & Fx' \\ \alpha_x \downarrow & \square & \downarrow \alpha_{x'} \\ Gx & \xrightarrow{G\varphi} & Gx' \end{array}$$

ex

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{array}{c} \xrightarrow{V \mapsto V} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{V \mapsto V^{**}} \end{array} \text{Vect}_{\mathbb{R}}$$

$V \rightsquigarrow$

$$V \rightarrow V^{**}$$

$$v \mapsto [\varphi \mapsto \varphi(v)]$$

$$\begin{aligned} \text{Vect}_{\mathbb{R}}^{\text{op}} &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}} \\ V &\longmapsto V^* = \text{Lin}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) \\ &\quad \langle v, - \rangle \end{aligned}$$

$$X \longmapsto X \times X$$

ex $\text{Set} \xrightarrow[\alpha \Downarrow ?]{\quad} \text{Set}$
 $X \longmapsto X$

$$\begin{aligned} \alpha_X &: X \times X \longrightarrow X \\ \forall X \in \text{Set} \end{aligned}$$

$$\text{Nat}((-)^2, \text{Id}) = ?$$

$$X_0 = \{a, b\}$$

$$X_0 \times X_0 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{X_0} &: X_0 \times X_0 \longrightarrow X_0 \\ (a, b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

YTD $\forall X \quad \forall x_1, x_2 \in X$

$$\alpha_X(x_1, x_2) = x_1$$

Pf $\nexists X_0 \xrightarrow{\varphi} X$
 $a \longmapsto x_1$
 $b \longmapsto x_2$

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 \times X_0 & \xrightarrow{p \times p} & X \times X \\
 \alpha_{X_0} \downarrow & \varphi & \downarrow \alpha_X \\
 X_0 & \xrightarrow{\varphi} & X
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (a, b) \mapsto (x_1, x_2) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 a & \mapsto & x_2
 \end{array}
 \quad \square$$

[ex]

$$\text{Grp} \xrightleftharpoons[\text{forget}]{\text{forget}} \text{Set}$$

$$\text{Nat}(\text{forget}, \text{forget}) = \mathbb{Z}$$

$$\alpha_G : G \longrightarrow G \quad (\text{отображение множеств})$$

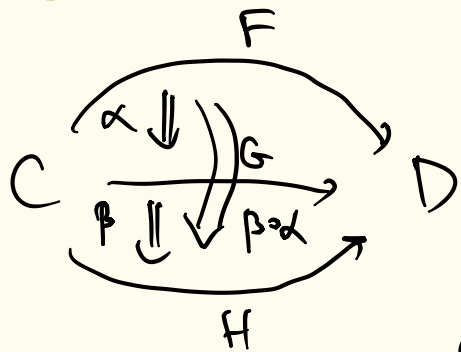
$$g \mapsto g^n, n \in \mathbb{Z}$$

[ex]

$$\text{Monoid} \xrightleftharpoons[\text{M} \mapsto \text{M}]{\text{M} \mapsto \text{M} \times \text{M}} \text{Set}$$

$$\begin{aligned}
 \{a, b\}^* &= \{1, a, b, aa, ab, ba, bb, aca, \dots\} \\
 &\parallel \\
 &\text{Nat}
 \end{aligned}$$

(вертикальная) композиция естеств. преобр.



$$\beta \circ \alpha: \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Mor}(D)$$

$$\alpha \mapsto (\beta \circ \alpha)_x \stackrel{\text{def}}{=} \beta_x \circ \alpha_x =$$

$$\begin{array}{c} Fx \\ \downarrow \alpha_x \\ Gx \\ \downarrow \beta_x \\ Hx \end{array}$$

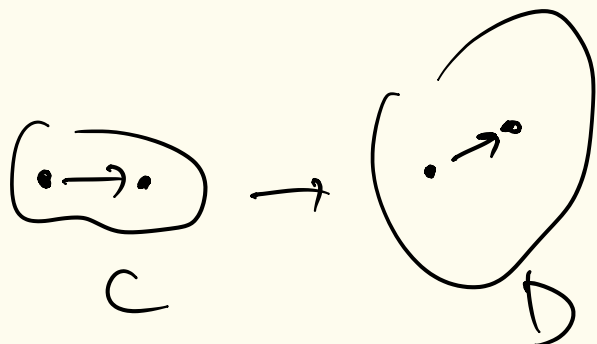
$\text{Fun}(C, D) = D^C$ категория функторов (функтор-категория)
малая

[ex] $C = \bullet \rightarrow \bullet$

$$\text{Fun}(\bullet \rightarrow \bullet, D) = \text{Arr}(D) = D^{\Delta^1}$$

$$\text{Ob}(\text{Arr}(D)) = \text{Mor}(D)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{x \xrightarrow{f} y} \\ \downarrow \varphi \downarrow \\ \boxed{x' \xrightarrow{f'} y'} \end{array} \in \text{Arr}(D)$$



естеств. преобр. м/г функторами из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$

$$\equiv \text{функтор } \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{\bullet \rightarrow \bullet} = \text{Arr}(\mathcal{D})$$
$$\downarrow \text{dom, cod}$$
$$\mathcal{D}$$

эквивалентность категорий

def $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ @ эквивалентность, если $\exists \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ т.з.

$$G \circ F \cong \text{Id}_{\mathcal{C}}, \quad F \circ G \cong \text{Id}_{\mathcal{D}}$$

$$\alpha_x: X \xrightarrow{\cong} G(F(x)) \quad \beta_x: x \xrightarrow{\cong} F(G(x))$$

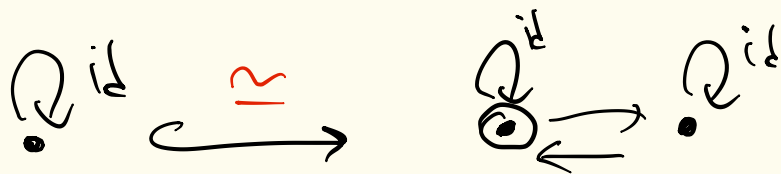
[Принцип эквивалентности (evil понятие)]

Тл (основная теорема теории категорий) $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ эквивалентность

$\Leftrightarrow$ F полный унитарный ($\forall x, y \in \mathcal{C} \quad \text{Hom}(x, y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(Fx, Fy)$)

F существенно суръективный $\forall d \in \mathcal{D} \exists x \in \mathcal{C} : Fx \cong d$

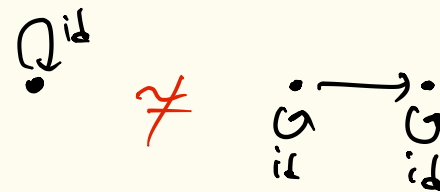
ex



$$\text{Hom}(\bullet, \bullet) = *$$

$$\text{Hom}(\odot, \odot) = *$$

ex



ex

$$\text{Fin Set} \supseteq_{\text{full}} \{ \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots \}$$

эквивалентность

скелет категории

ex

$$\text{Cat} \xrightarrow{\Phi} \text{Cat} \text{ изоморфизм категорий}$$

ex

Set_{partial}

$$\text{Ob} = \text{мн-ва}$$

$$\text{Hom}_{\text{Set}_{\text{partial}}}(X, Y) = \{ X \dashrightarrow Y \}$$

$$(A \subseteq X, f: A \rightarrow Y)$$

$$\text{Set}_{\text{partial}} \simeq \text{Set}_*$$

$$X \longmapsto (X \sqcup \{*\}, *)$$

$$(\textcircled{A})^X$$

$$f \downarrow$$

$$(\textcircled{})^Y$$

$$A^{X \sqcup \{*\}}$$

$$f \downarrow \quad \downarrow$$

$$Y \sqcup \{*\}$$

$$X \sqcup \{*\} \setminus A$$

$$\swarrow \text{const}(\ast)$$

$$X \setminus \{x_0\}$$

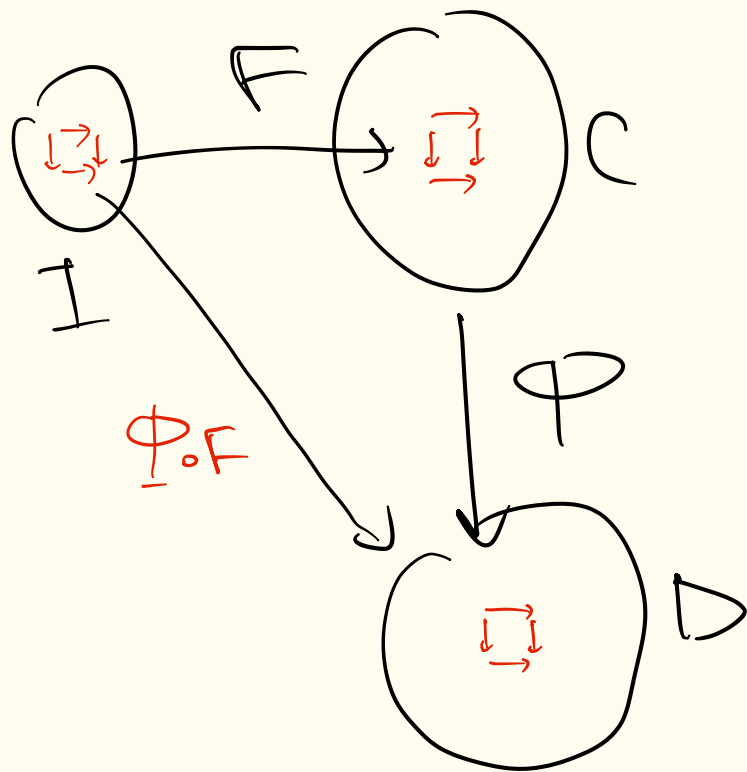
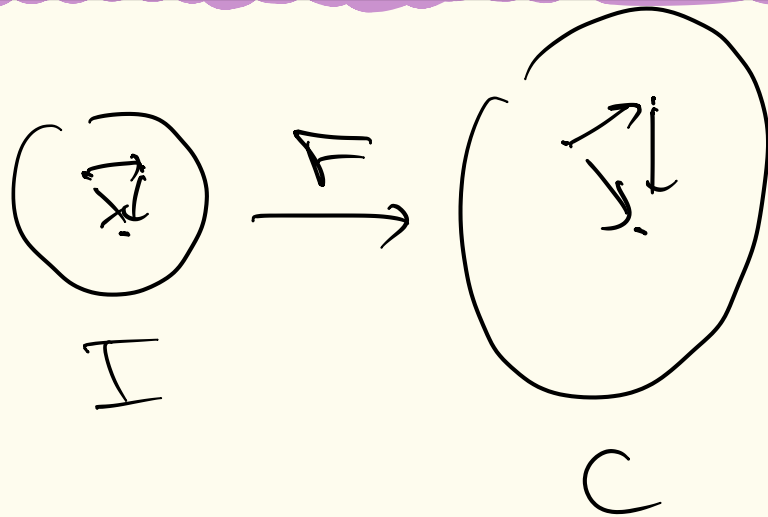
$$\longleftarrow (X, x_0)$$

$$C \underset{u_0}{\simeq} D \implies C \underset{\exists u \text{ sub.}}{\simeq} D$$

$$u_0$$

$$\exists u \text{ sub.}$$

Функтор $\equiv$ диаграмма



малая кат.
 $\text{Fun}(I, C) = C^I$

I -индексированные
 диаграммы в C

$\nexists \Phi \circ F: I \rightarrow D$

- Функтор $\Phi: C \rightarrow D$ переводит стрелки в стрелки
- ком. Δ -ки в ком. Δ -ки
- I -индексированные диаграммы в I -инд. диаграммы:

$$\Phi_*: C^I \rightarrow D^I$$

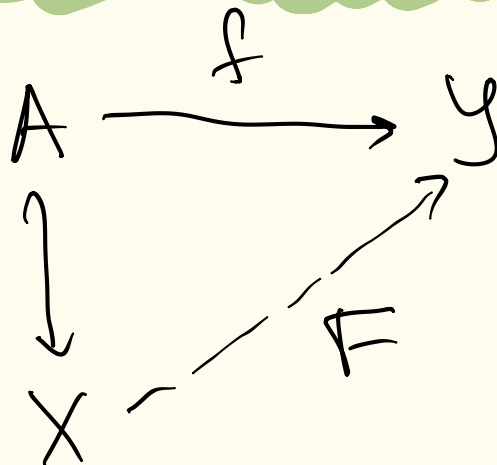
$$F \mapsto \Phi \circ F$$

дополнение до коммутативного Δ

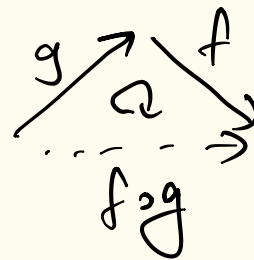


(концентрируемся на этом)

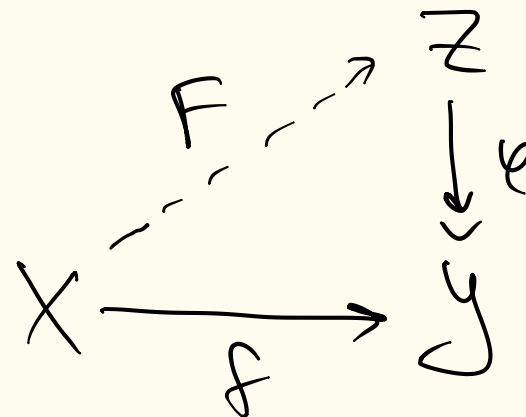
Задача продолжения



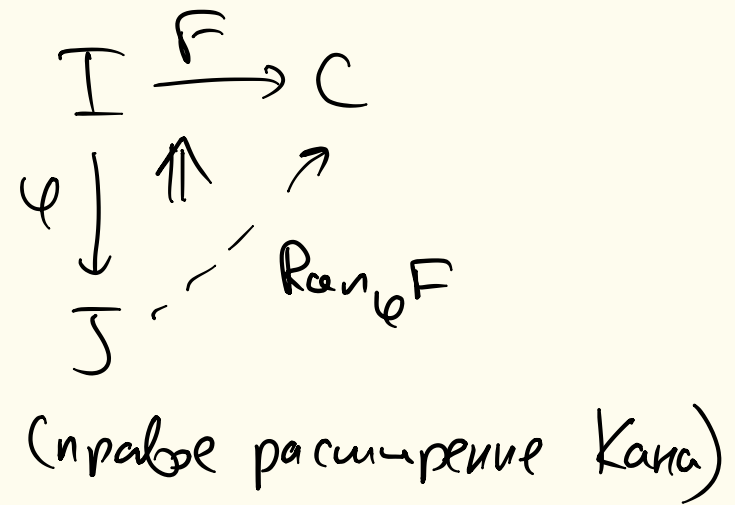
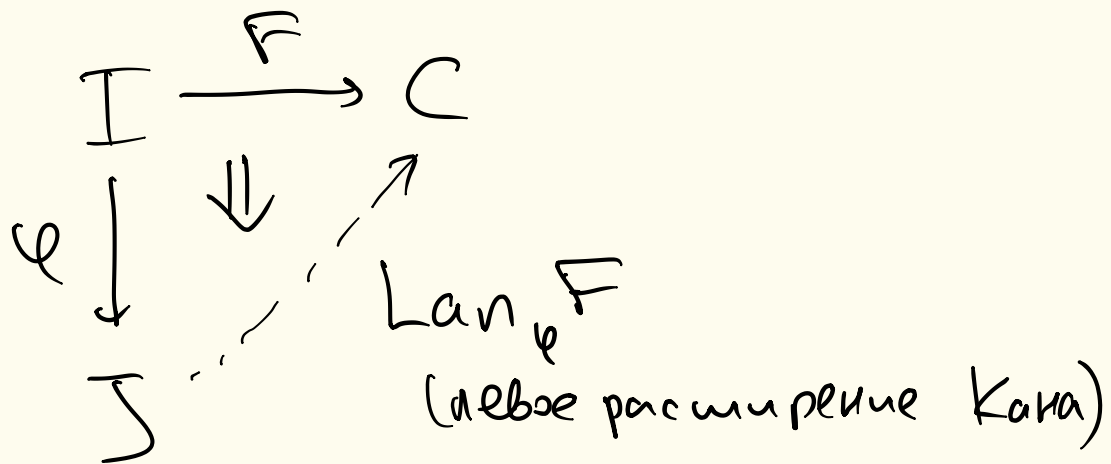
$$F|_A = f$$



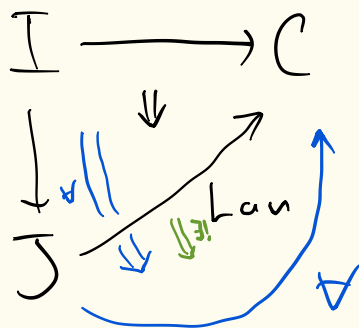
Задача поднятия



$$\psi \circ F = f$$



def $I \xrightarrow{F} C, I \xrightarrow{\varphi} J$
 левым расширением Кана F вдоль φ (и)
 пара $(\text{Lan}_\varphi F: J \rightarrow C, \alpha: F \Rightarrow \text{Lan}_\varphi F \circ \varphi)$ т.е.



(она **универсальна**)

Анонс

