

Теория категорий

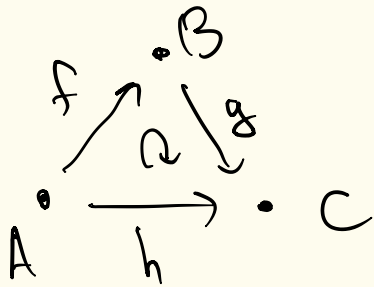
Лектор

Василий Ижик

@jusanagi

§ Жизнь внутри категории

Категория $\mathcal{C}$



диаграмма

коммутативная диаграмма

$$h = g \circ f$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\mathcal{C} = \text{Set}$$

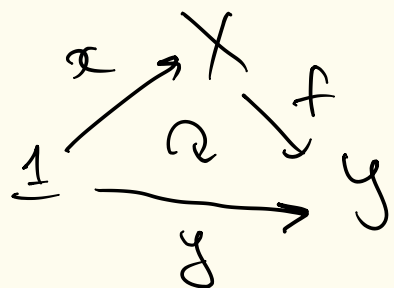
$$\underline{n} = \{1, \dots, n\}$$

$$\left\{ \underset{\substack{\parallel \\ \{1\}}}{1} \longrightarrow X \right\} \longleftrightarrow \{x \in X\}$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$x \in X$$

$$f(x) \in Y$$



$$f(x) = y$$

$$f \circ 1 = y$$

§ События размера : мн-ва и классы

С категория $Ob(C)$

Теория классов
мн-ва $\subseteq$ классы

$\exists$ класс всех мн-в

$\exists$ класса всех классов

класс, не являющийся мн-вом называют собственным

аксиоматика NBG

Логика $\rightsquigarrow$ Теория множеств

}

Теория категорий

$\exists$ мн-ва всех мн-в

$(\exists A$ мн-ва всех мн-в

$y = \{B \in A \mid B \notin B\})$

§ Математические структуры: данные и аксиомы

$$X * Y = \{ (x, y) \mid \begin{matrix} x \in X \\ y \in Y \end{matrix} \}$$

$$X \text{ мн-во} \quad X^n = \text{Map}(\underline{n}, X)$$

$$\text{ex} \quad X^1 = X \quad X^n = \underbrace{X * \dots * X}_n \quad n > 1$$

$$X^0 \cong \underline{1} = \{*\}$$

n -арная операция

$$X^n \rightarrow X$$

1 -арная операция

$$X \rightarrow X$$

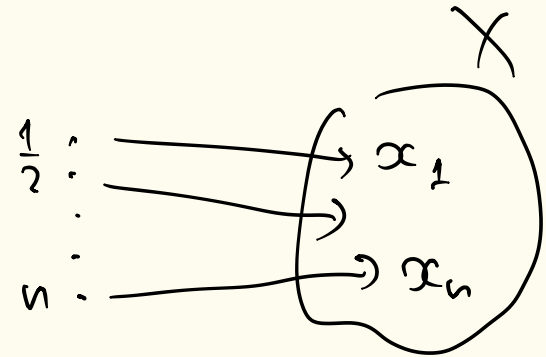
2 -арная операция

$$X * X \rightarrow X$$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

0 -арная операция

$$\underline{1} \rightarrow X \iff x \in X$$



$$\underline{0} = \emptyset \xrightarrow{\exists!} X$$

def "мн-во с отмеченной точкой" (X, x_0) , где

$$X \text{ мн-во, } x_0: \underline{1} \rightarrow X$$

$$(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ т.е. } f(x_0) = y_0$$

Set_*

def магмой @ пара (M, μ) , где

$$M \text{ мн-во, } \mu: M \times M \rightarrow M$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{1} & \xrightarrow{x_0} & X \\ & \searrow \alpha & \downarrow f \\ & y_0 & Y \end{array}$$

$$(M, \mu) \rightarrow (N, \nu)$$

$$M \xrightarrow{f} N \text{ т.е. } f(\mu(x, y)) = \nu(f(x), f(y)) \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$$
$$\forall x, y \in M$$

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{f \times f} & N \times N \\ \mu \downarrow & \alpha & \downarrow \nu \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

def полугруппа @ magma (M, μ) т.е. μ ассоциат.

$$\left(\begin{aligned} x \cdot y &:= \mu(x, y) \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \\ \forall x, y, z \in M \end{aligned} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{\text{id} \cdot \mu} & M \times M \\ \mu \times \text{id} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \mu \\ M \times M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

def моноид @ (M, μ, e) , где (M, μ) полугруппа,

$$e: \underline{1} \longrightarrow M \quad \text{т.е.} \quad x \cdot e = x = e \cdot x \quad \forall x \in M$$

$$\begin{array}{ccc} M \cong \underline{1} \times M & \xrightarrow{e \times \text{id}} & M \times M \\ & \searrow \text{id} \quad \curvearrowright \quad \downarrow \mu & \\ & M & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M \cong M \times \underline{1} & \xrightarrow{\text{id} \times e} & M \times M \\ & \searrow \text{id} \quad \curvearrowright \quad \downarrow \mu & \\ & M & \end{array}$$

Упр

придумайте гомоморфизм полугрупп $M/\sim$

двух моноидов, кот. не является гомоморфизмом моноидов

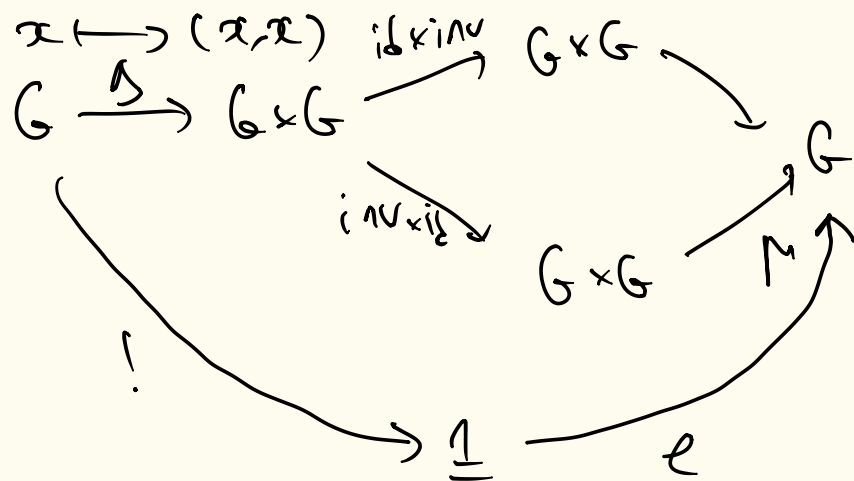
def группа @ (G, μ, e, inv) т.е.

(G, μ, e) monoid $\text{inv}: G \rightarrow G$

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e \quad \forall x \in G$$

$$x^{-1} := \text{inv}(x)$$

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$



порядковые структуры

def Препорядкован (preorder) @ пара $(X, \leq)$, где

$$\leq \subset X \times X$$

$$(x, y) \in \leq \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y$$

1) $x \leq x \quad \forall x \in X$ (рефлексивность)

2) $\left. \begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \leq z$ (транзитивность)

def Прегноредок @ заступник
порядком,

если $\left. \begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$
(антисимметричность)

$$(X, \leq) \longrightarrow (Y, \leq) \Leftrightarrow X \xrightarrow{f} Y \text{ т.т.}$$
$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$
$$(f, f(\leq) \leq \leq y)$$

def Категория C это $(\text{Ob } C, \text{Mor } C, \text{dom}, \text{cod}, \text{id}, \circ)$,

где $\text{Ob } C$ класс

$\text{Mor } C$ класс

$$\text{id}: \text{Ob } C \longrightarrow \text{Mor } C \quad x \mapsto 1_x = \text{id}_x$$

$$\text{dom}: \text{Mor } C \longrightarrow \text{Ob } C \quad f \mapsto \text{dom } f$$

$$\text{cod}: \text{Mor } C \longrightarrow \text{Ob } C \quad f \mapsto \text{cod } f$$

$$\circ: \text{Mor } C \times \text{Mor } C \dashrightarrow \text{Mor } C \quad (f, g) \mapsto g \circ f = gf$$

(определено для (f, g) т.т. $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dom}(\text{id}(x)) = x \\ \text{cod}(\text{id}(x)) = x \\ \text{dom}(g \circ f) = \text{dom} f \\ \text{cod}(g \circ f) = \text{cod} g \\ \text{id}(\text{cod} f) \circ f = f, \quad f \circ \text{id}(\text{dom} f) = f \\ (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \end{array} \right.$$

$$F: C \rightarrow D$$

$$F: \text{Ob} C \rightarrow \text{Ob} D$$

$$F: \text{Mor} C \rightarrow \text{Mor} D$$

$$A, B \in \text{Ob}(C)$$

$$\text{Hom}_C(A, B) := \left\{ f \in \text{Mor}(C) \mid \begin{array}{l} \text{dom} f = A \\ \text{cod} f = B \end{array} \right\}$$

$$F|_{\text{Hom}_C(A, B)} : \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_D(FA, FB)$$

§ Примеры категорий

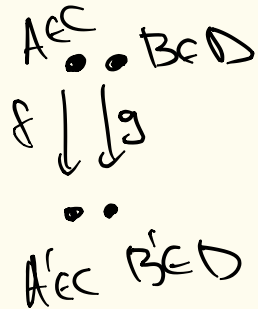
Set, Set*, Magma, Semigroup, Group, Monoid, Preorder, Poset

def (1) кат. C @ моноид, если $\text{Mor } C$ это мн-во

(2) кат. C @ локально моноид, если $\forall A, B \in C$
 $\text{Hom}_C(A, B)$ мн-во

Cat = категория малых категорий

def C, D категории $\otimes C \times D$ $\text{Ob}(C \times D) = \text{Ob } C \times \text{Ob } D$



$$\begin{aligned} \text{Hom}_{C \times D}((A, B), (A', B')) &= \\ &= \text{Hom}_C(A, A') \times \text{Hom}_D(B, B') \end{aligned}$$

def C категория

подкатегория $D \subseteq C$ это кат. D т.е.

$$\begin{aligned} \text{Ob } D &\subseteq \text{Ob } C \\ \text{Mor } D &\subseteq \text{Mor } C \end{aligned}$$

(full)

полная подкатегория это подкатегория $D \subseteq C$ т.е.

$$\forall x, y \in D \quad \text{Hom}_D(x, y) = \text{Hom}_C(x, y)$$

def

кат. C @ гомоморфизм, если $\text{id}: \text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } C$
биекция

$$\begin{array}{ccc} x' \in X & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ x \in X & & \end{array}$$

[ex]

$$X \in \text{Set}$$

$$\text{Set} \hookrightarrow \text{Cat}$$

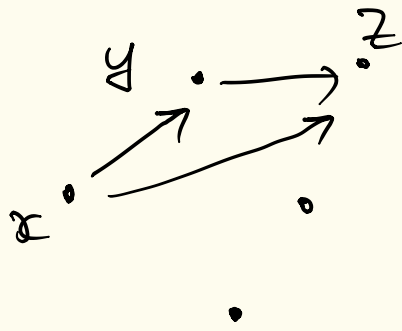
def

кат. C @ тонкая (thin), если $\forall x, y \in C$

$$|\text{Hom}_C(x, y)| \leq 1$$

[ex]

$$(X, \leq) \in \text{Preorder}$$



$$\text{Ob}(X, \leq) = X$$

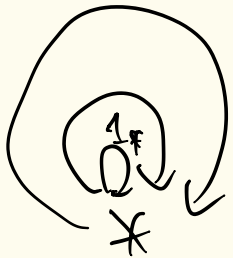
$$\text{Hom}_{(X, \leq)}(x, y) = \begin{cases} \{x, y\}, & x \leq y \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Preorder} \hookrightarrow \text{Cat}$$

ex

однообъектная категория?

$$\text{Ob}(C) = \{*\}$$



$$\text{Hom}_C(*, *) =: M$$

$$\text{Monoid} \hookrightarrow \text{Cat}$$

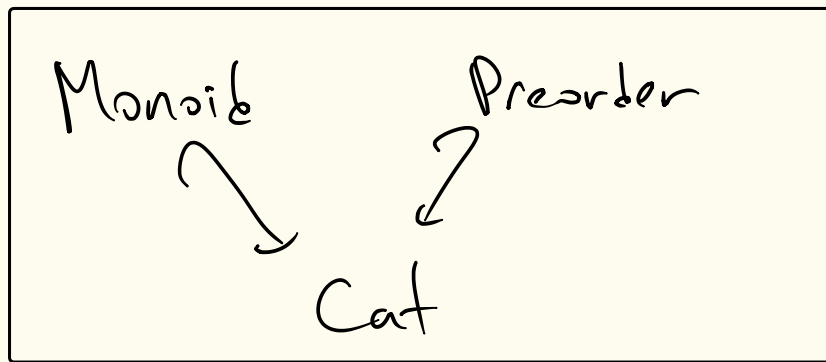
(a) $1_* \in M$

(b) $\circ: M \times M \rightarrow M$

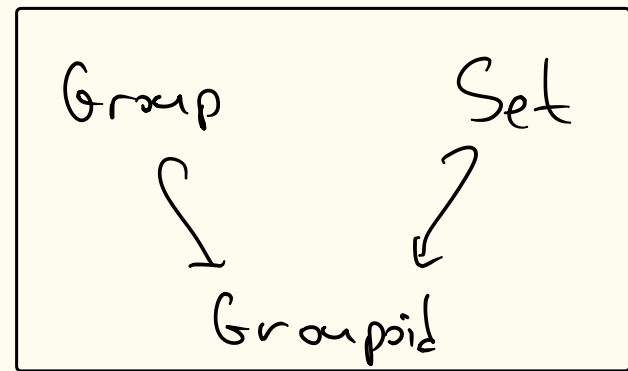
def

монгоид @ малая категория с одним объектом

прегнэрегкн @ малая тиккая категория



$\cong$



def

группоидом @ кат. $\mathcal{C}$ т.е. $\text{Mor } \mathcal{C} = \text{Iso } \mathcal{C}$
 группой @ группоид с одним объектом

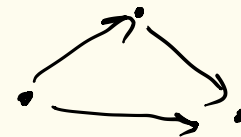
ex

Δ^0 - пустая категория $\emptyset$

Δ^1 - терминальная категория $\underline{1}$ 

Δ^2 - категория интервала $\bullet \longrightarrow \bullet$

Δ^3 - категория пары коммутирующих стрелок



(walking, ходячий коммутативный треугольник)

ex

C категория $\neq C^{op}$

$$\text{Ob } C^{op} = \text{Ob } C$$

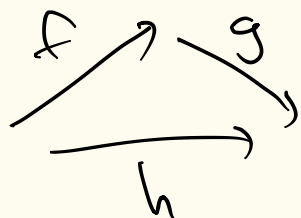
$$\text{Mor } C^{op} = \text{Mor } C$$

морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ в C^{op}

$$\text{dom}_{C^{op}} = \text{cod } C$$

$$\equiv f \in \text{Hom}_C(Y, X)$$

$$\text{cod}_{C^{op}} = \text{dom } C$$



в $C \rightsquigarrow$



$$h = g \circ_C f$$

$$h = f \circ_{C^{op}} g$$

$$(C^{op})^{op} = C$$

Yup

$$G \text{ группа} \Rightarrow G \cong G^{op}$$

def $\mathcal{C}$ категория
 $X \xrightarrow{f} Y$ морфизм @
изоморфизмом, если

$$\exists g: Y \rightarrow X \text{ т.ч. } f \circ g = 1_Y \\ g \circ f = 1_X$$

$$(g = f^{-1}) \quad X \cong Y$$

Пример в Set изоморфизмы
это биекции

Упр $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

① F сохраняет iso $(X \xrightarrow{f} Y \text{ iso} \Rightarrow Fx \xrightarrow{Ff} Fy \text{ iso})$

$$\& (Ff)^{-1} = F(f^{-1})$$

② F полное вложение $\Rightarrow F$ консервативный

def функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ @
полным вложением,
если $\forall X, Y \in \mathcal{C}$
 $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$

def функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ @
консервативным, если
 F отражает изоморфизмы

$$(\forall f \quad F(f) \text{ iso в } \mathcal{D} \\ \Rightarrow f \text{ iso в } \mathcal{C})$$

Упр

§ Примеры функторов

ex $\text{Cat} \xrightarrow{\text{op}} \text{Cat}$
 $C \longmapsto C^{\text{op}}$

$$\begin{array}{ccc} C & & C^{\text{op}} \\ F \downarrow & \rightsquigarrow & \downarrow F^{\text{op}} \equiv F \\ D & & D^{\text{op}} \end{array}$$

Ковариантный функтор

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ X \longmapsto & & FX \\ \begin{array}{c} X \\ f \downarrow \\ y \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} FX \\ \downarrow Ff \\ Fy \end{array} \end{array}$$

~~Контравариантный функтор~~

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ X \longmapsto & & FX \\ \begin{array}{c} X \\ f \downarrow \\ y \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} FX \\ \uparrow Ff \\ Fy \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C^{\text{op}} & \rightarrow & D \\ \uparrow & & \\ C & \rightarrow & D^{\text{op}} \end{array}$$

[ex]

Заданные функции

$$\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$$

$$\text{Preord} \rightarrow \text{Cat}$$

$$\text{Ob}: \text{Cat} \rightarrow \text{Set}$$

$$\text{Mor}: \text{Cat} \rightarrow \text{Set}$$

[ex]

Представимый функтор

C категория $X \in C$

$$\rightsquigarrow \text{Hom}(X, -): C \rightarrow \text{Set}$$

$$Y \mapsto \text{Hom}_C(X, Y)$$

$$\begin{array}{c} Y_1 \\ \varphi \downarrow \\ Y_2 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{c} \text{Hom}(X, Y_1) \\ \downarrow \varphi_* \\ \text{Hom}(X, Y_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y_1 \\ & & \downarrow \varphi \\ & & Y_2 \end{array}$$

$$f \mapsto \varphi \circ f$$

посткомпозиция

$$\text{Hom}(-, X) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

Yon

задать функтор

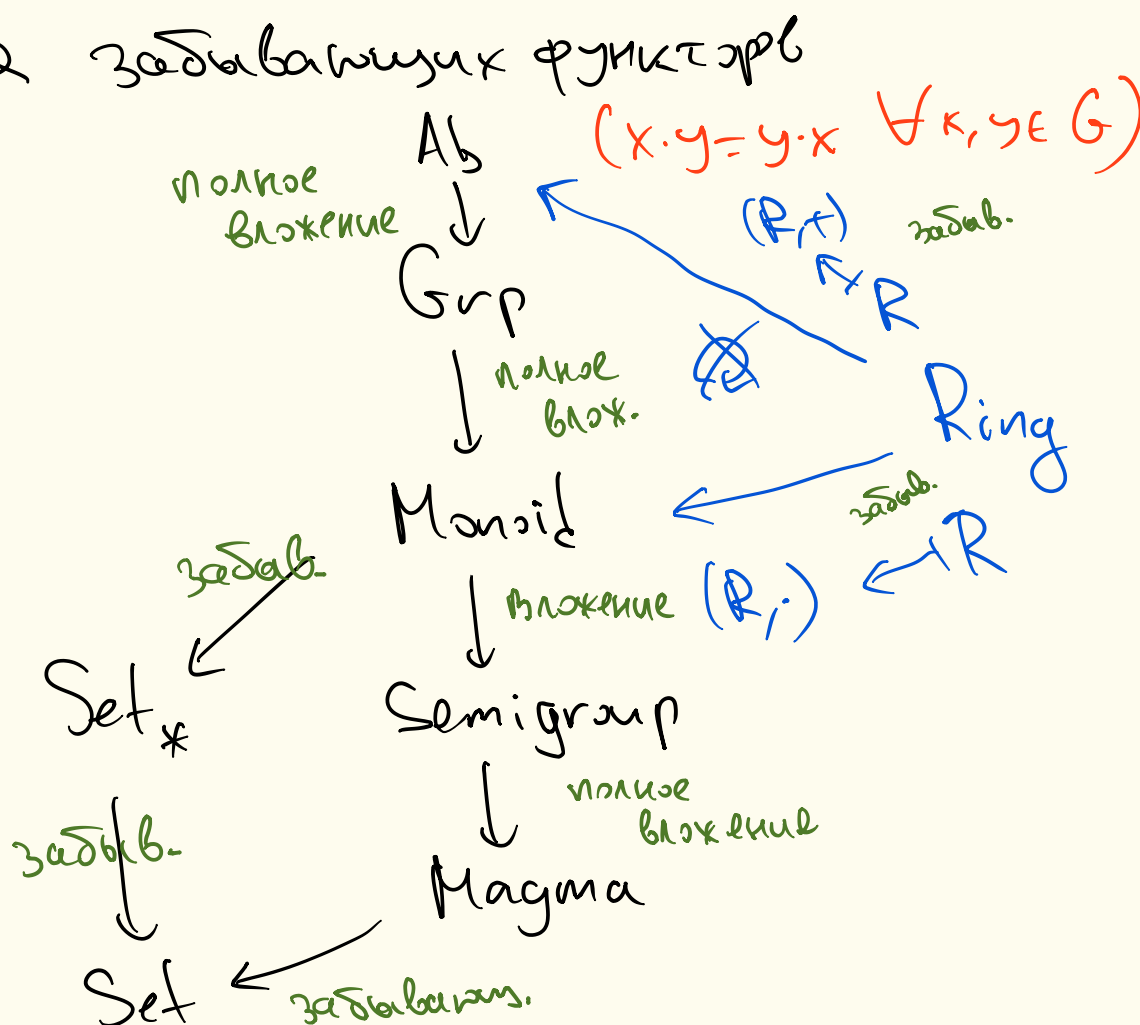
$$\text{Hom} : \underline{\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}} \rightarrow \text{Set}$$

суперфунктор

$$(X, Y) \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

§ Иерархия задаваемых функторов

$$X \xrightarrow{\quad} Y$$



def $F: C \rightarrow D$

① F @ **универсальным** (strict, faithful), если

$$\forall x, y \in C \quad \text{Hom}_C(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_D(Fx, Fy)$$

инъективно

② F @ **полным** (full), если —//— сюръективно

($\gamma + \sigma$ = полное вложение, fully faithful)

③ F @ **инъективным** на объектах, если

$$\underset{b \in D}{Fx \cong Fy} \Rightarrow \underset{b \in C}{x \cong y}$$

④ F @ **сюръективным** на объектах, если $\forall z \in D$
 $\exists x \in C \quad Fx \cong z \quad b \in D$

$\vee$	$\wedge$	$\neg$	$\subseteq$
+	-	-	-
+	+	-	-
+	+	+	-
+	+	+	+

Забывает

структуру

Вложение

забывает
уник. структуру

$\vee \wedge \neg$

полное вложение

$\vee + \neg \Rightarrow \wedge$

Эквивалентность

забывает
свойство