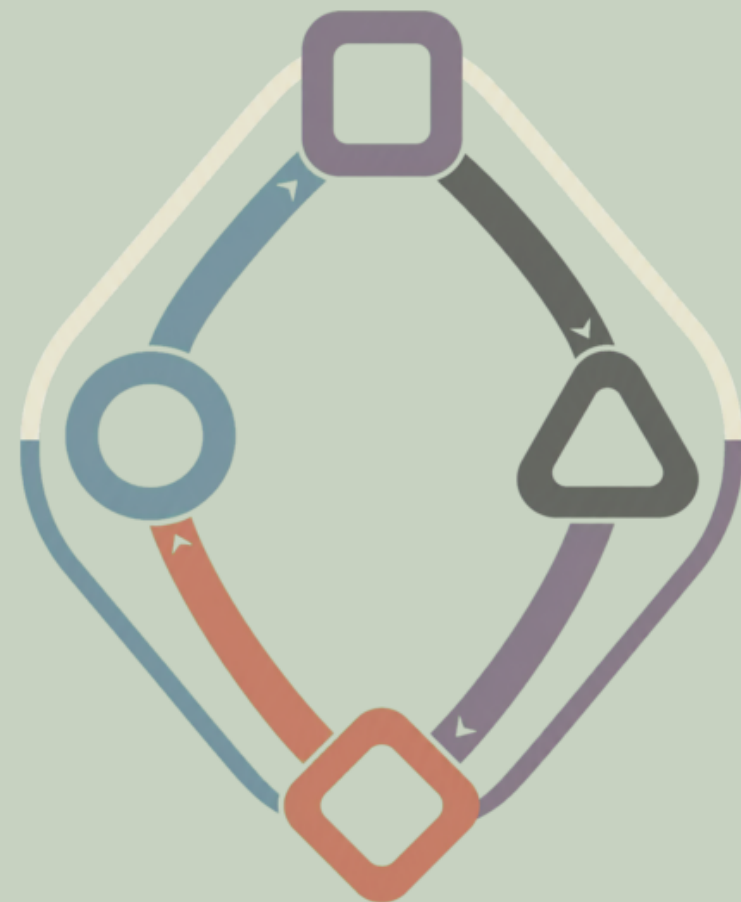


Введение в теорию категорий

Лекция 2

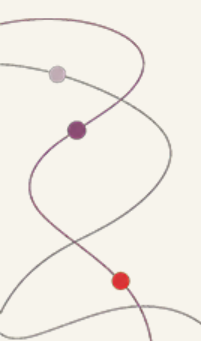
среда, 12 августа 2026



ПРО МЕНЯ



- Закончил **Матфак ВШЭ**
- Работаю в **179** школе
- Преподаю математику школьникам, студентам и взрослым, организую математические события
- Веду телеграм-канал **Кроссворд Тьюринга**
@turings_crossword
- Телеграм **@d1_d57**

- 
- Нас интересуют **конструкции** в математике.
 - Конструкция задаётся **функтором**: комбинаторный вид — функтор $\mathbf{FinSet}^{\text{bij}} \rightarrow \mathbf{FinSet}^{\text{bij}}$.
 - Функторы сравнивают между собой.
 - Две конструкции могут давать одно и то же всегда и оставаться разными.
 - Некоторые конструкции до функтора не продолжаются вовсе.
 - Функтор переводит коммутативную диаграмму в коммутативную — этим и работаем.
- 

определение

Категория $\mathcal{C}$ состоит из:

- класса объектов $\text{Ob } \mathcal{C}$;
- множеств морфизмов $\mathcal{C}(A, B)$ на каждую пару объектов;
- композиции $\circ: \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ и единицы 1_A , для которых

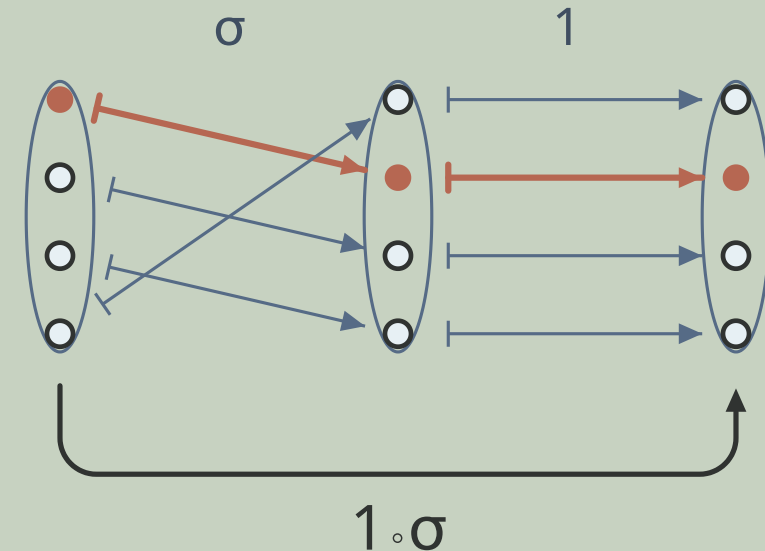
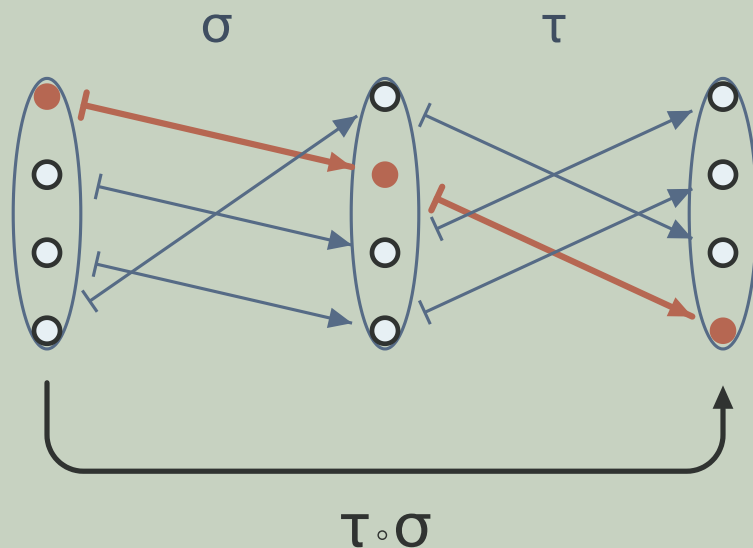
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad 1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

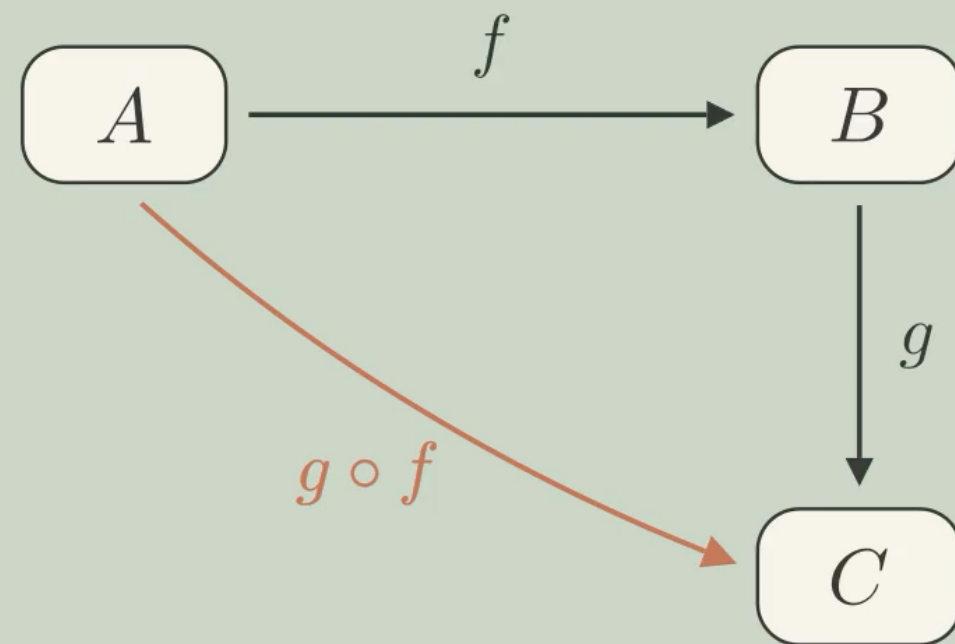
пример

На прошлой лекции мы работали в категории $\mathcal{K} = \mathbf{FinSet}^{\text{bij}}$:

- $\text{Ob } \mathcal{K} = \{A \mid A \text{ конечное множество}\}$;
- $\mathcal{K}(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ биекция}\}$;

$$|\mathcal{K}(A, B)| = n! \text{ при } |A| = |B| = n, \text{ иначе } |\mathcal{K}(A, B)| = 0$$





$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

ФУНКТОР

определение

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ — **два** отображения: $\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$ и $\mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(FA, FB)$, причём

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff, \quad F1_A = 1_{FA}$$

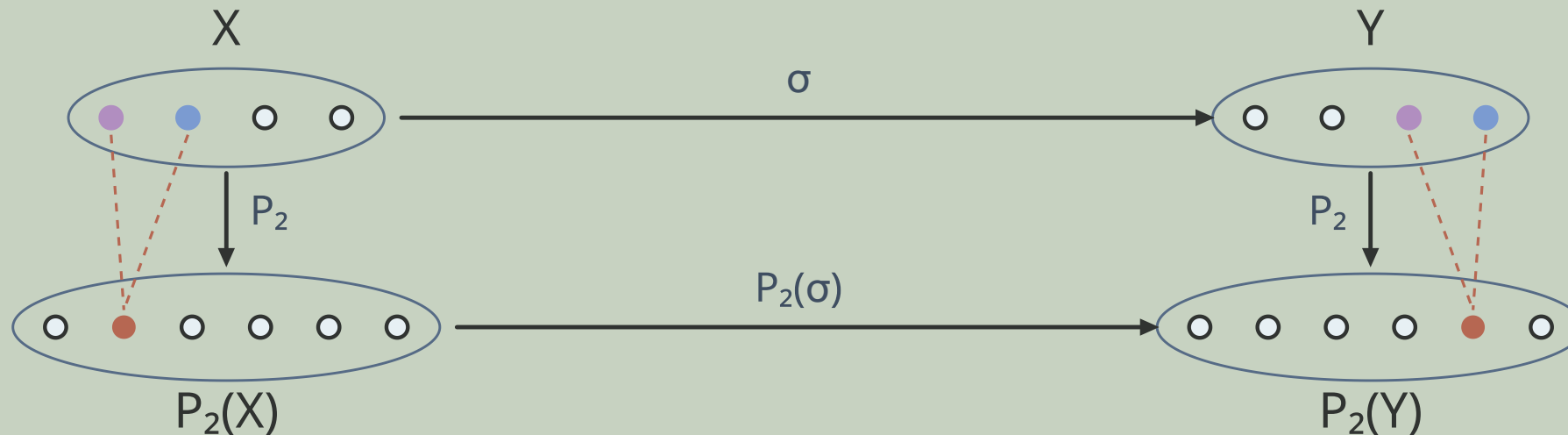
пример

Комбинаторный вид — функтор $\mathcal{K} = \mathbf{FinSet}^{\text{bij}}$ в себя:

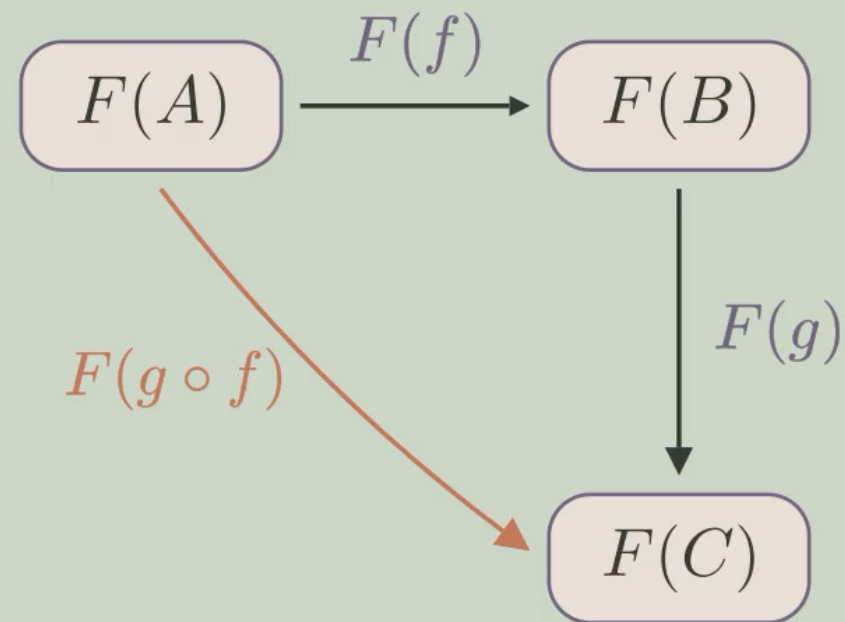
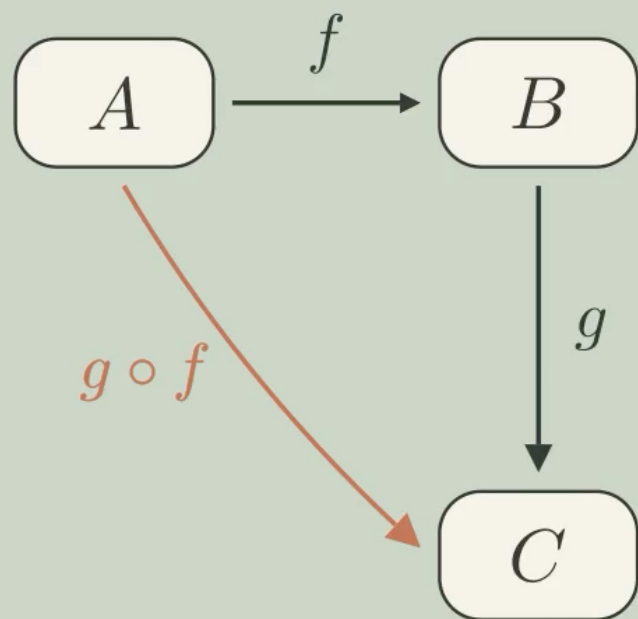
- на объектах: P_2X — пары элементов X , и $|X| = 4 \Rightarrow |P_2X| = 6$
- на морфизмах: $\mathcal{K}(X, Y) \rightarrow \mathcal{K}(P_2X, P_2Y)$

$$P_2(\sigma): \{a, b\} \mapsto \{\sigma(a), \sigma(b)\}$$

Дальше — функторы в векторных пространствах, группах и топологии



$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$



$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Раздел 1

Конструкции в линейной алгебре

Векторное пространство над $\mathbb{R}$ — множество V с операциями $+: V \times V \rightarrow V$ и $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, для которых

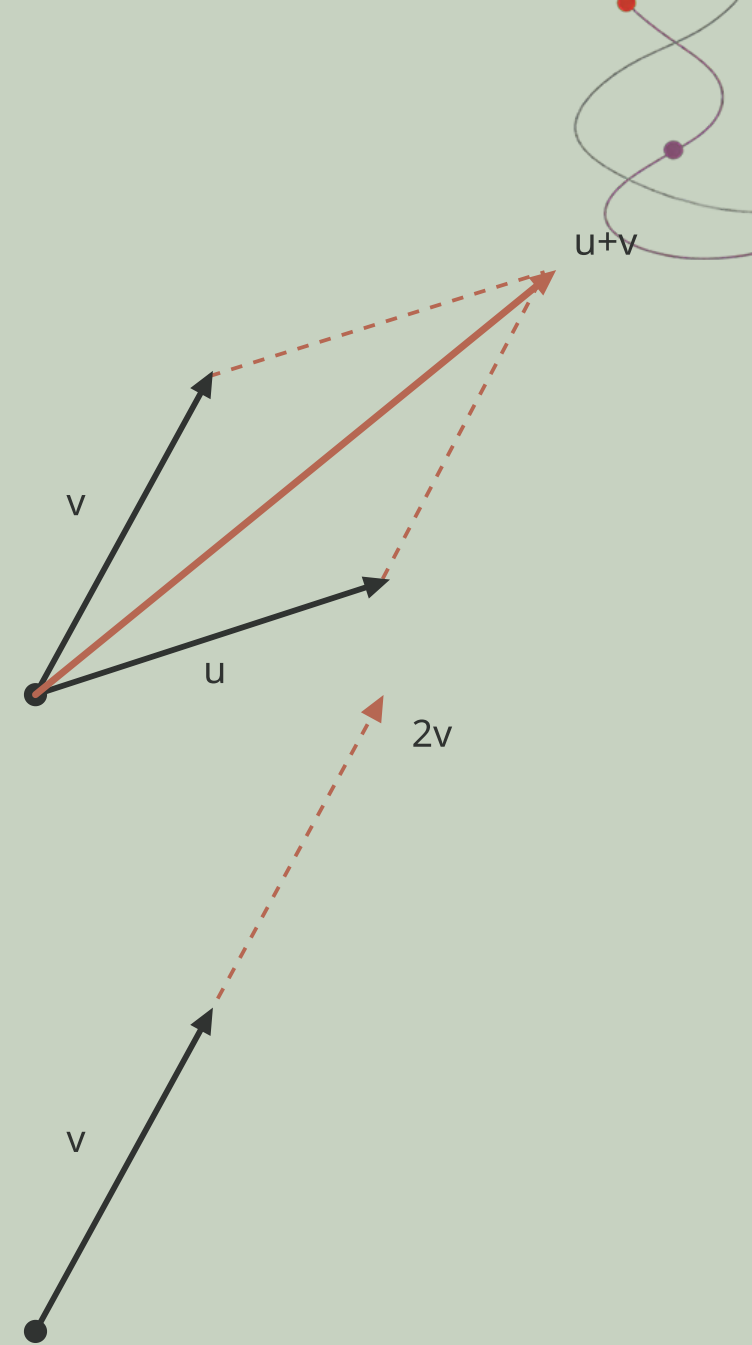
$$u + v = v + u, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$$

$$v + 0 = v, \quad \forall v \exists (-v): v + (-v) = 0$$

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \quad 1 \cdot v = v$$

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

- наборы $(x_1, \dots, x_n): \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ —
 $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \lambda(x_i) = (\lambda x_i)$
- параллельные переносы пространства
- функции на одном множестве: многочлены степени $\leq n$ и $\mathbb{R}^X = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ при конечном X —
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x), (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$



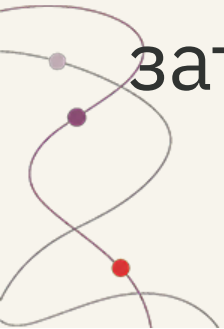


Для векторных пространств есть конструкции, аналогичные комбинаторным видам

Одна из них сопоставляет пространству V его **двойственное** пространство V^*

Оказывается, $V \cong V^*$, но канонического изоморфизма нет; для V^{**} — есть

Покажем, как язык функторов позволяет формализовать и доказать эти утверждения



ЛИНЕЙНЫЙ ИЗОМОРФИЗМ

определение

$f: V \rightarrow W$ **линейно**, если $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ и $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

Линейное f — **изоморфизм**, если есть линейное $g = f^{-1}$ с $g \circ f = 1_V$ и $f \circ g = 1_W$ — понятие осмысленно в любой категории

пример

- $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$: $x + iy \mapsto (x, y)$
- многочлены степени $\leq n$ и $\mathbb{R}^{n+1}$: $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n)$
- $\mathbb{R}^X$ при $|X| = n$ и $\mathbb{R}^n$: $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$

КАТЕГОРИЯ, В КОТОРОЙ МЫ РАБОТАЕМ

определение

$$\begin{aligned}\text{Ob } \mathbf{Vect}^{\text{iso}} &= \{V \text{ векторное пространство}\} \\ \mathbf{Vect}^{\text{iso}}(V, W) &= \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ изоморфизм}\}\end{aligned}$$

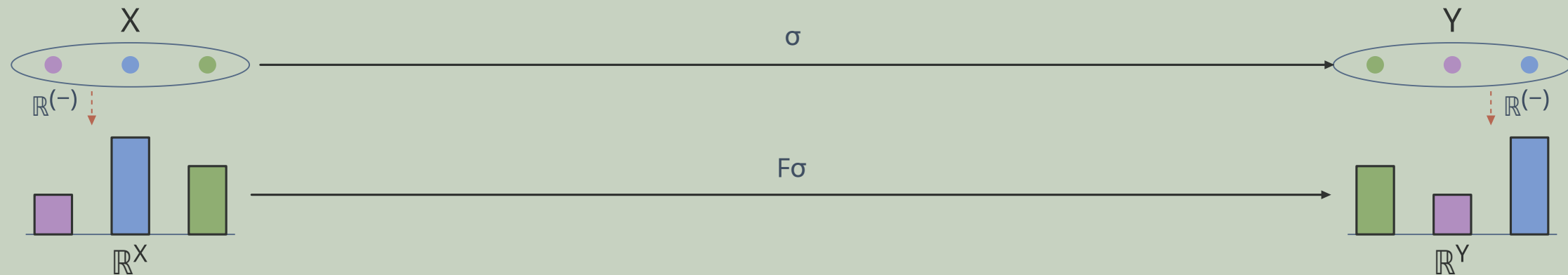
пример

$FA = \mathbb{R}^A$ продолжается до функтора $F: \mathbf{FinSet}^{\text{bij}} \rightarrow \mathbf{Vect}^{\text{iso}}$:

$$(F\sigma)(f)(b) = f(\sigma^{-1}(b)), \quad \text{то есть} \quad (F\sigma)(f) = f \circ \sigma^{-1}$$

доказательство

$$\begin{aligned}(F(\tau \circ \sigma))(f) &= f \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1} = (F\tau)((F\sigma)(f)) \\ (F1_A)(f) &= f \implies F1_A = 1_{\mathbb{R}^A}\end{aligned}$$



БАЗИС

определение

Базис V — набор $e_1, \dots, e_n$, по которому каждый $v \in V$ раскладывается однозначно: $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Задать базис то же, что задать изоморфизм $V \rightarrow \mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$: $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$
- многочлены степени $\leq n$: $1, x, \dots, x^n$
- $\mathbb{R}^X$: $\delta_i(x_i) = 1, \delta_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$

утверждение

Все базисы V равной длины — это **размерность** $\dim V$

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W$$

Выберем базисы в V и W . Тогда линейное $A: V \rightarrow W$ записывается матрицей (a_{ij}) :

$$Ae_j = \sum_i a_{ij}e_i$$

утверждение

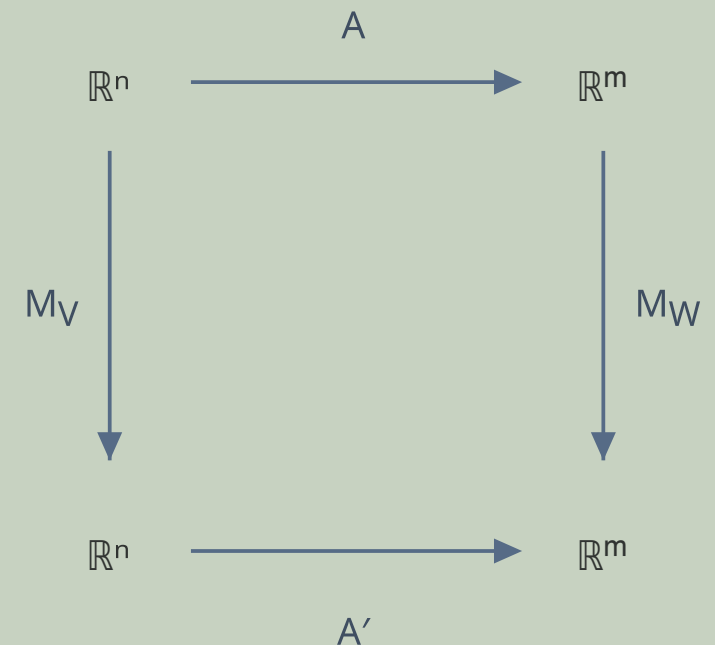
Построим функтор $\mathbf{Vect}^{\text{iso}} \rightarrow \mathbf{Mat}$, где $\mathbf{Mat}$:
объекты — числа, $\mathbf{Mat}(n, m)$ — матрицы
размера $m \times n$

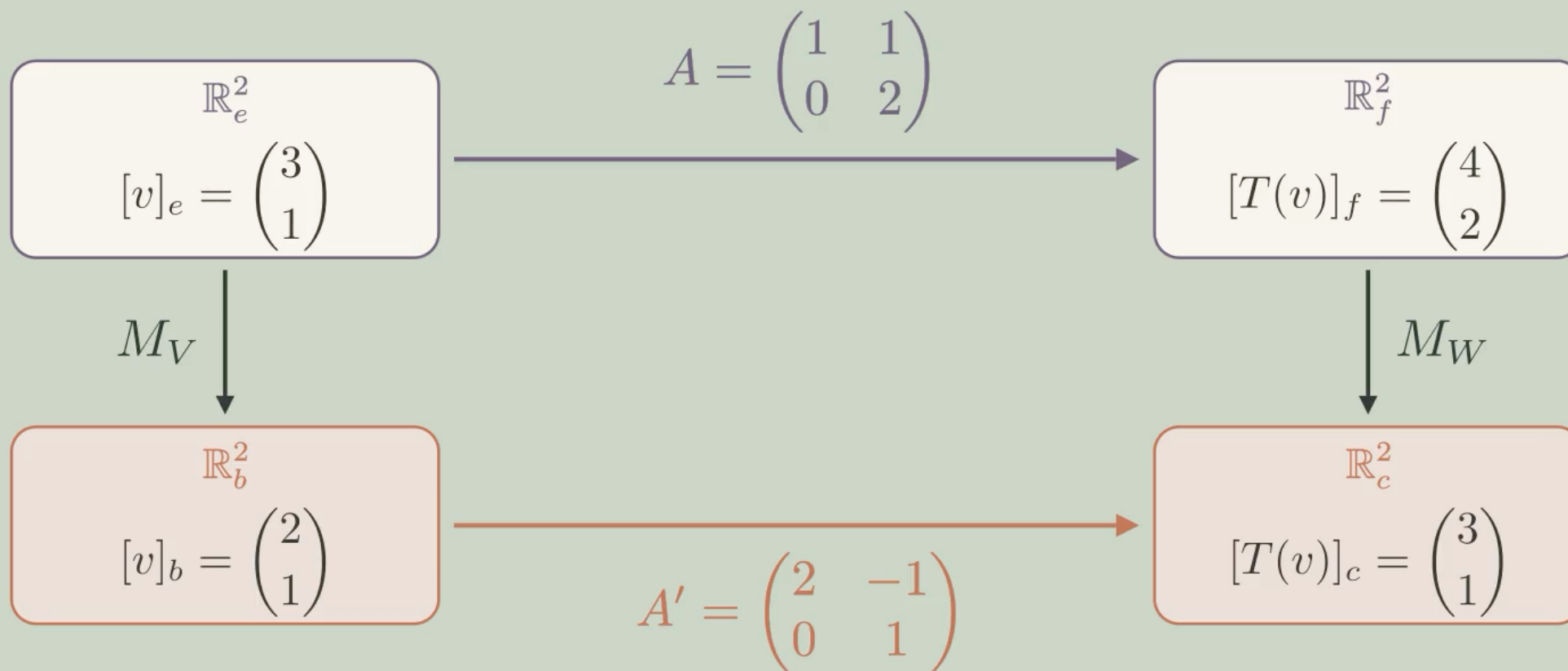
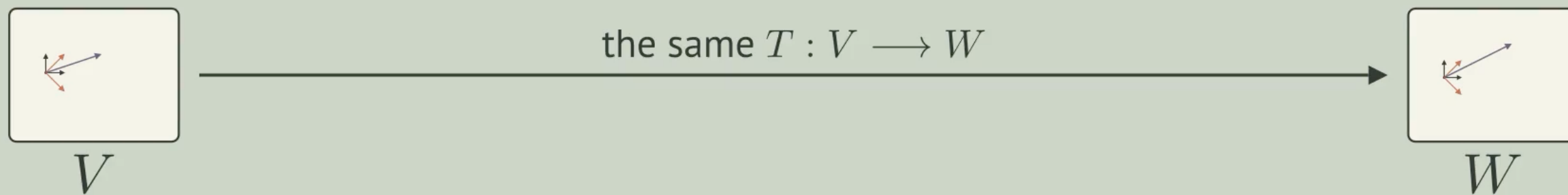
$$F: \mathbf{Vect}^{\text{iso}} \rightarrow \mathbf{Mat}, \quad FV = \dim V, \quad FA = (a_{ij})$$

$$F(A \circ B) = FA \cdot FB, \quad F1_V = E$$

Другой выбор базисов даёт другой функтор; связывают их матрицы перехода

$$GA = M_W \cdot FA \cdot M_V^{-1}$$





$$A' = M_W A M_V^{-1}$$

same map T different coordinate matrices A and A'
the vectors stay fixed; only their coordinates change

ДВОЙСТВЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

определение

$$V^* = \{\varphi: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ линейное}\} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$$

пример

- на $\mathbb{R}^3$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto 3x_1 - x_2$
- на многочленах: $p \mapsto p(0)$ и $p \mapsto \int_0^1 p$

утверждение

$$(-)^*: \mathbf{Vect}^{\text{iso}} \rightarrow \mathbf{Vect}^{\text{iso}}, V \mapsto V^*$$

Изоморфизм $f: V \rightarrow W$ и функционал $\psi \in V^*$ дают

$$f^*: V^* \rightarrow W^*, \quad f^*(\psi) = \psi \circ f^{-1}$$

ИЗОМОРФИЗМ V И V^*

определение

Базис $e_1, \dots, e_n$ в V , коэффициенты разложения — $x_i(v)$:

$$v = x_1(v) e_1 + \dots + x_n(v) e_n$$

Каждое $x_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ линейно, следовательно $x_1, \dots, x_n \in V^*$

пример

Многочлены степени $\leq n$: базис $1, x, \dots, x^n$ и $x_k(p) = a_k = p^{(k)}(0)/k!$

утверждение

Покажем, что $x_1, \dots, x_n$ — базис V^*

доказательство

Возьмём $f \in V^*$ и подставим разложение v :

$$f(v) = \sum_i x_i(v) f(e_i) \implies f = \sum_i f(e_i) x_i$$

Значит $x_1, \dots, x_n$ — базис V^* , то есть $\dim V^* = \dim V$ и $V \cong V^*$

ИЗОМОРФИЗМА БЕЗ КООРДИНАТ НЕТ

утверждение

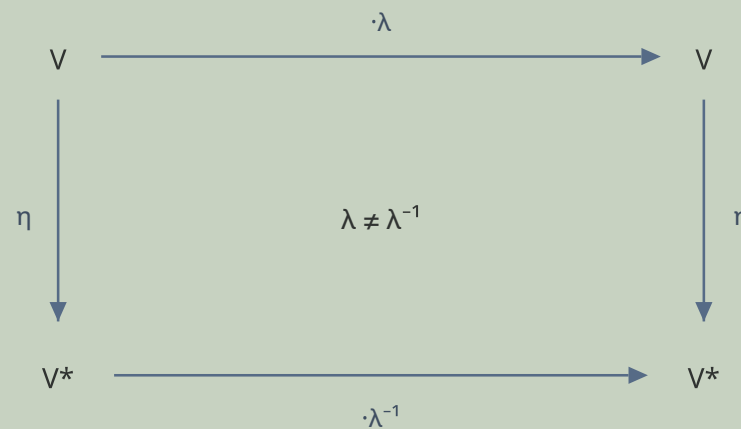
$V \cong V^*$ всегда — но строили мы этот изоморфизм по выбранному базису

Бывает ли изоморфизм $\alpha_V: V \rightarrow V^*$, **не зависящий от выбора координат**? При $V \neq 0$ — **нет**

доказательство

Замена $f = \lambda \cdot \text{id}$ сжимает координатные функции в λ^{-1}

$$\alpha_V(v) = \alpha_V(\lambda^2 v) = \lambda^2 \alpha_V(v) \implies \alpha_V = 0$$





определение

Применим конструкцию дважды и **спарим** вектор с функционалом:

$$V^{**} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}(V^*, \mathbb{R}), \quad \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v)$$

утверждение

Зафиксируем первый аргумент:

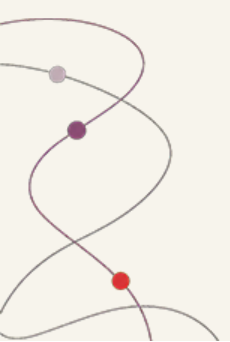
$$\eta_V: V \rightarrow V^{**}, \quad \eta_V(v) = (\varphi \mapsto \varphi(v))$$

При конечномерном V это изоморфизм

доказательство

Пусть $\eta_V(v) = 0$ при $v \neq 0$, то есть $\varphi(v) = 0$ для всех φ

Возьмём базис с $e_1 = v$ и его координатную функцию: $x_1(v) = 1$ — противоречие

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$$


ЕСТЕСТВЕННЫЙ ИЗОМОРФИЗМ

утверждение

Квадрат $\eta_W \circ f = f^{**} \circ \eta_V$ на $\psi \in W^*$:

$$(\eta_W(fv))(\psi) = \psi(fv)$$

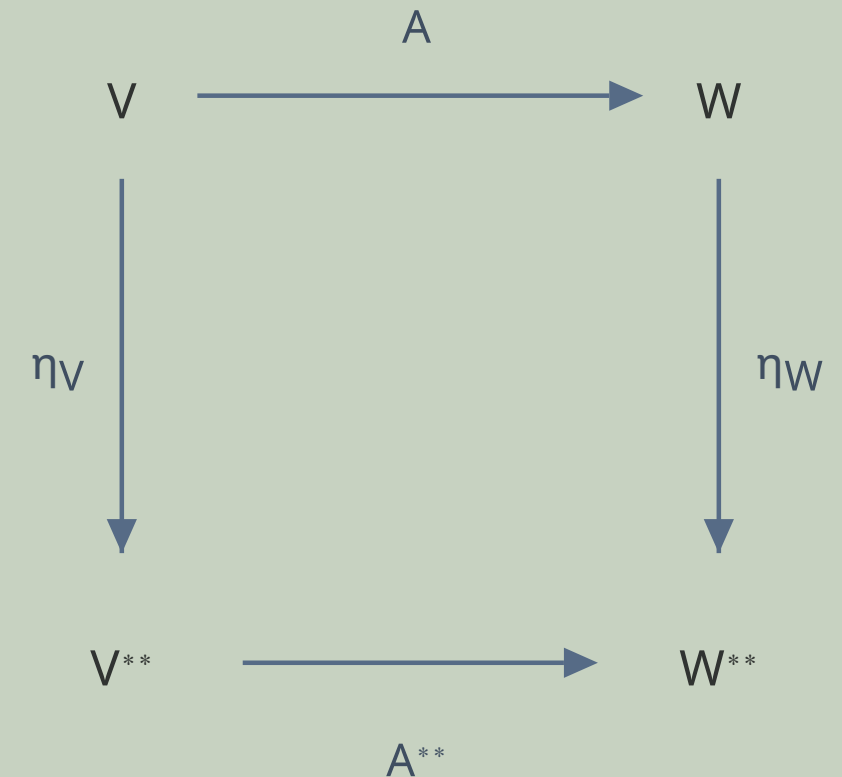
$$(f^{**}\eta_V(v))(\psi) = (\eta_V(v))(\psi \circ f) = \psi(fv)$$

Для $V \rightarrow V^*$ нужен базис;

$\eta_V(v) = (\varphi \mapsto \varphi(v))$ — одна на все. Такой изоморфизм **естественный**, а правило — **естественное преобразование**

$$\text{Id} \cong (-)^{**}, \quad \text{Id} \not\cong (-)^*$$

Конструкция в линейной алгебре — функтор $\mathbf{Vect}^{\text{iso}} \rightarrow \mathbf{Vect}^{\text{iso}}$; изоморфизм видов на первой лекции определялся так же



Раздел 2

Ретракты

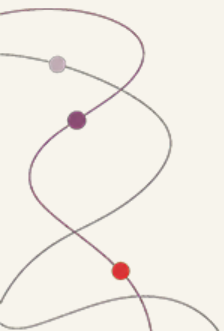


Теорема Брауэра о неподвижной точке — известное утверждение топологии, доказательство было чисто аналитическим

Эйленберг и Маклейн переписали его алгебраически — с этого началась теория категорий

Посмотрим на их аргумент в разных категориях

Заодно разберём, что **некоторых функторов не существует**



В $\mathbf{Set}(X, Y)$ **все** отображения, а не биекции, как в $\mathbf{FinSet}^{\text{bij}}(X, Y)$

утверждение

$X \mapsto \text{Inj}_k(X)$ — раскраски в k разных цветов — **не продолжается до функтора** $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$

пример

$|A| = k, |B| = k + 1, A \subset B$; вложение s и проекция r с $r \circ s = \text{id}_A$

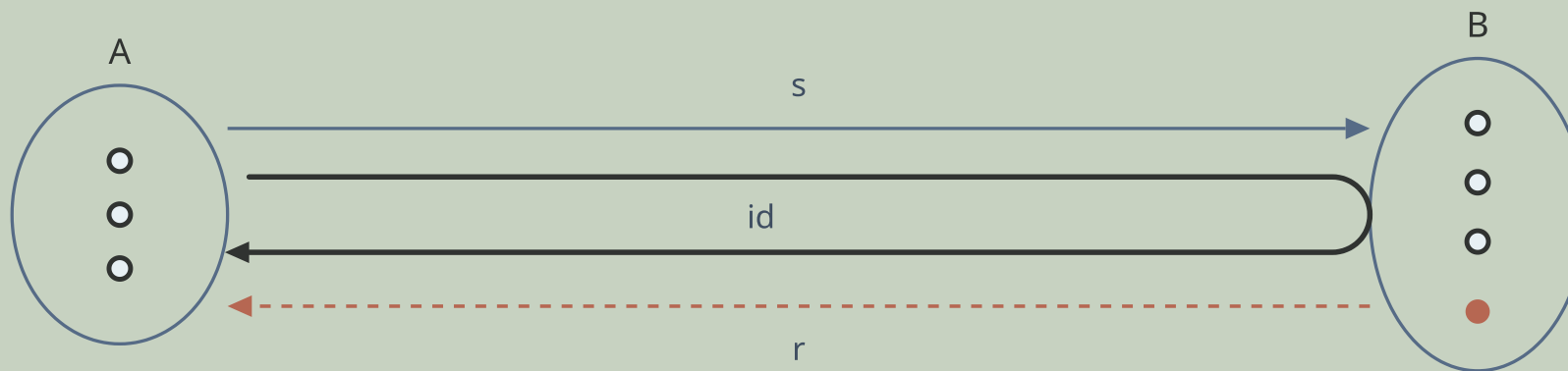
$|\text{Inj}_k(A)| = k!$, а $\text{Inj}_k(B)$ **пусто**

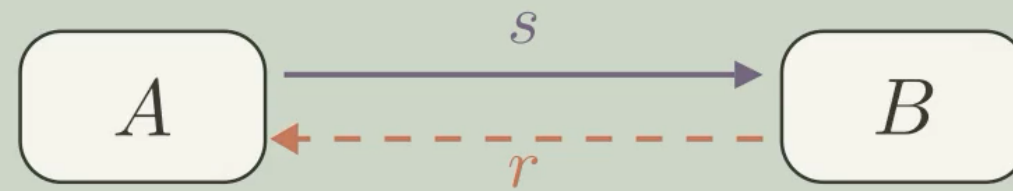
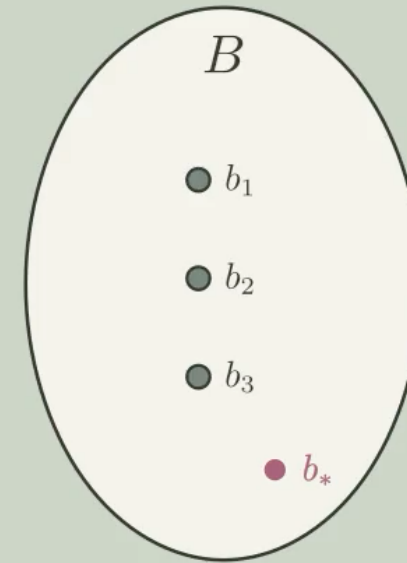
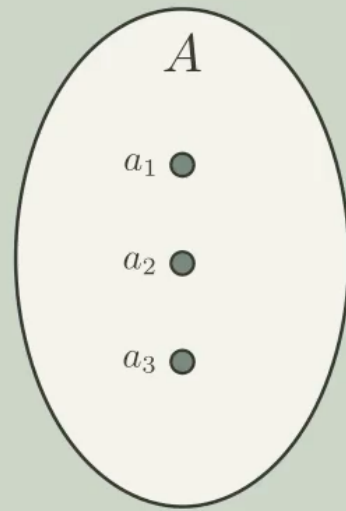
доказательство

Предположим, что функтор F существует. Тогда

$$F(r) \circ F(s) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$$

Противоречие





$$r \circ s = \text{id}_A$$

s – section

r – retraction

утверждение

$G \mapsto Z(G)$ до функтора $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$
не продолжается

Есть половина на объектах, нет
 $\mathbf{Grp}(G, H) \rightarrow \mathbf{Grp}(ZG, ZH)$

пример

$$Z(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \text{ а } Z(S_3) = \{e\}$$

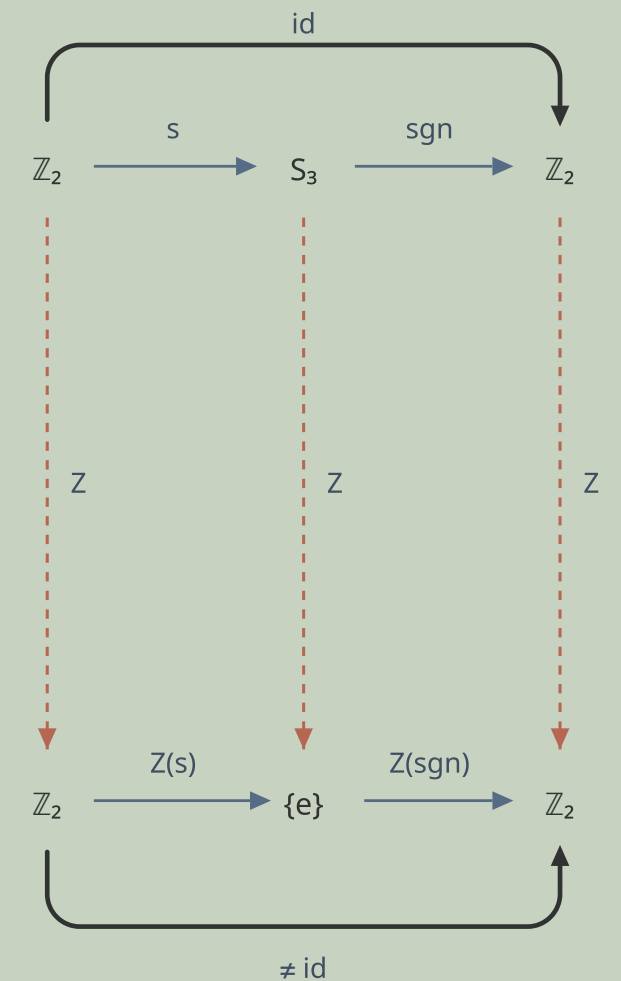
$$s: \mathbb{Z}_2 \rightarrow S_3, 1 \mapsto (1\ 2), \text{ и } \text{sgn}: S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2: \text{sgn} \circ s = \text{id}$$

доказательство

Предположим, что функтор Z существует. Тогда

$$Z(\text{sgn}) \circ Z(s) = \text{id}_{\mathbb{Z}_2}: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \{e\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

Противоречие



РЕТРАКТЫ

определение

$s: A \rightarrow B$ и $r: B \rightarrow A$ с $r \circ s = \text{id}_A$: r — **ретракция**, s — **сечение**, A — **ретракт** B

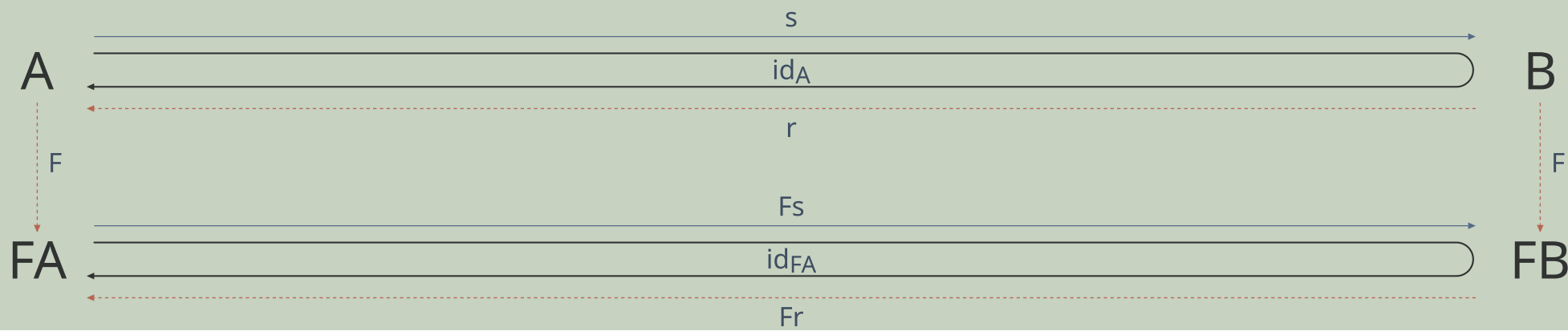
пример

Когда у вложения $A \hookrightarrow B$ найдётся r ?

- **Set** и **Vect**: всегда
- **Grp**: ровно когда $B = N \rtimes A$
- **Top**: общего ответа нет — нужен инструмент

утверждение

A ретракт $B \Rightarrow FA$ ретракт FB : $Fr \circ Fs = F(r \circ s) = \text{id}_{FA}$



ДИСК И ОКРУЖНОСТЬ

На топологическом пространстве X петли с началом и концом в точке x образуют группу $\pi_1(X, x)$

Это функтор $\pi_1: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp}$: пространство даёт группу, непрерывное отображение — гомоморфизм

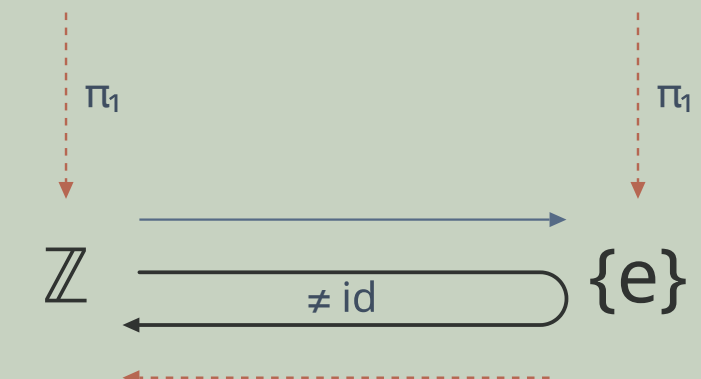
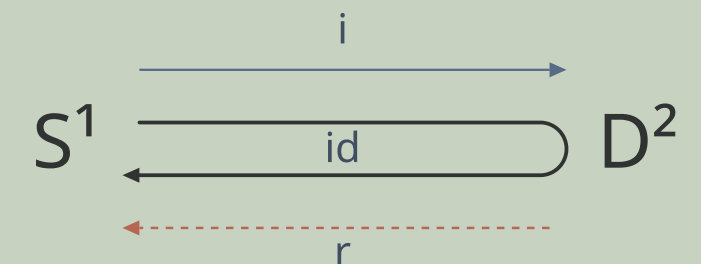
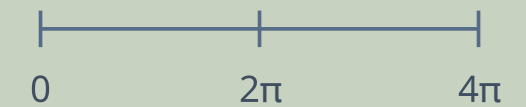
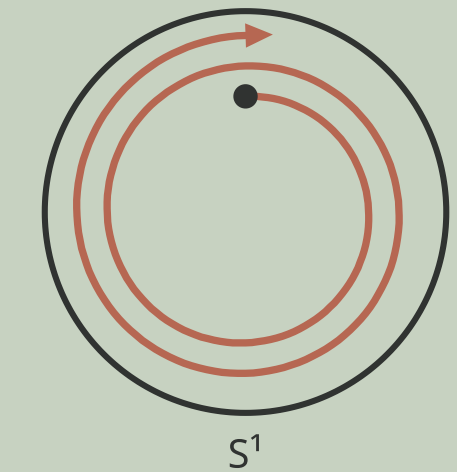
пример

- на диске петля стягивается в точку:
 $\pi_1(D^2) = \{e\}$
- на окружности петлю различает число оборотов: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

утверждение

Ретракции $D^2 \rightarrow S^1$ **не существует**: иначе тождественной была бы композиция

$$\mathbb{Z} \rightarrow \{e\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

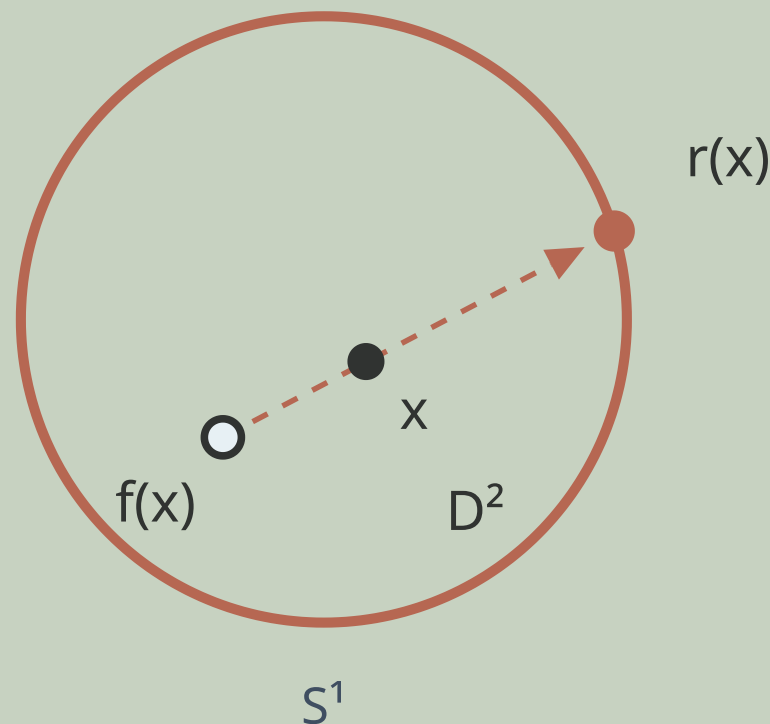


ТЕОРЕМА БРАУЭРА

Всякое непрерывное отображение диска в себя имеет неподвижную точку

Нет неподвижной точки — значит для каждого x есть направление «от $f(x)$ к x », и луч доходит до края

Точка края уходит в себя: получился ретракт S^1 в D^2 — а его не бывает



ИТОГ

- конструкции сравнивают **вместе с действием на $\mathcal{C}(A, B)$**
- совпадать на объектах и быть разными — бывает: $\text{Id} \not\cong (-)^*$, хотя $V \cong V^*$; а $\text{Id} \cong (-)^{**}$
- конструкции бывают запрещены — и запрет доказывается одним приёмом

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ

