

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ

ЛЕКЦИЯ 1

29 июля 2026

# ПРО МЕНЯ



- Закончил **Матфак ВШЭ**
- Работаю в **179** школе
- Преподаю математику школьникам, студентам и взрослым, организую математические события
- Веду телеграм-канал **Кроссворд Тьюринга @turings\_crossword**
- Телеграм **@d1\_d57**

# СООТВЕТСТВИЕ ЗАДАЧ

В этих двух комбинаторных задачах одинаковый ответ:

- сколько в сумме сторон и диагоналей у 15-угольника;
- сколькими способами можно выбрать две батарейки из 15 имеющихся

# СООТВЕТСТВИЕ ЗАДАЧ

В этих двух комбинаторных задачах одинаковый ответ:

- сколько в сумме сторон и диагоналей у 15-угольника;
- сколькими способами можно выбрать две батарейки из 15 имеющихся

Это следует из того, что существует взаимно однозначное соответствие между отрезками и парами батареек

# СООТВЕТСТВИЕ ЗАДАЧ

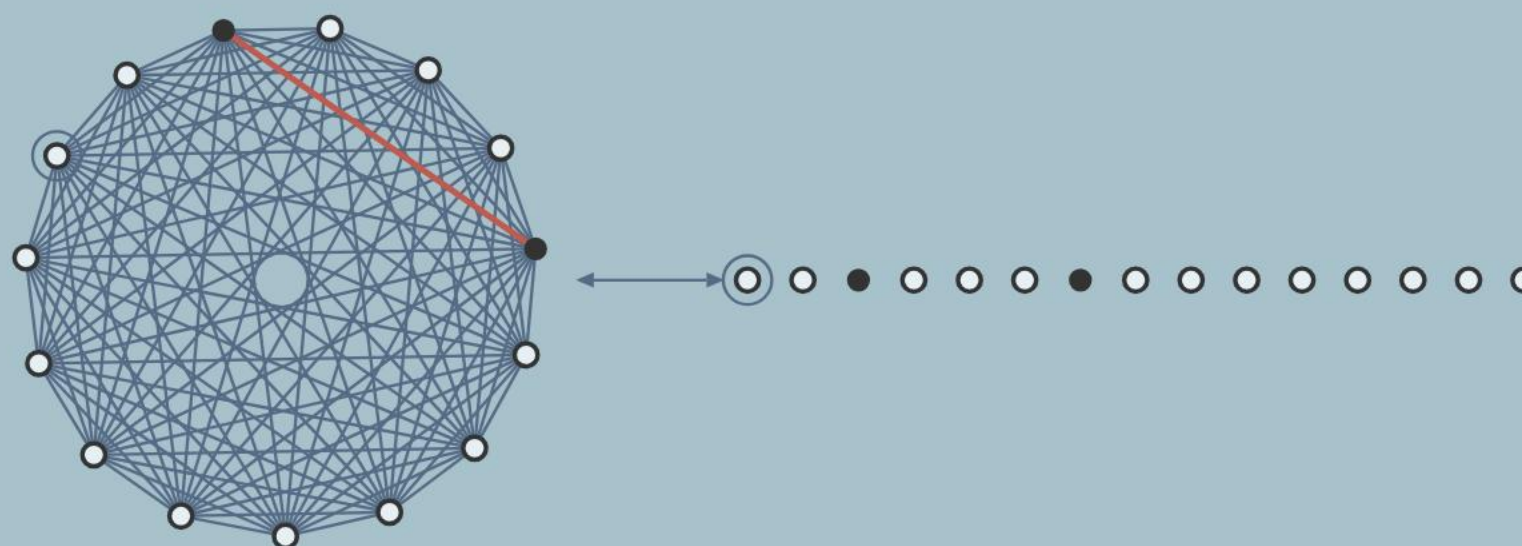
В этих двух комбинаторных задачах одинаковый ответ:

- сколько в сумме сторон и диагоналей у 15-угольника;
- сколькими способами можно выбрать две батарейки из 15 имеющихся

Это следует из того, что существует взаимно однозначное соответствие между отрезками и парами батареек

**Отрезок  $\leftrightarrow$  пара вершин  $\leftrightarrow$  пара батареек**

Один из важных комбинаторных принципов — если между элементами множеств установлено взаимно однозначное соответствие, в них равное число элементов



# КОМБИНАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА

## Рассмотрим тождества о биномиальных коэффициентах

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$  при  $n \geq 1$
- $\sum_{0 \leq l \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{l} = 3^n$
- $\sum_{k \geq 0} \binom{n+1-k}{k} = \text{Fib}_{n+2}$

# КОМБИНАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Рассмотрим тождества о биномиальных коэффициентах

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$  при  $n \geq 1$
- $\sum_{0 \leq l \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{l} = 3^n$
- $\sum_{k \geq 0} \binom{n+1-k}{k} = \text{Fib}_{n+2}$

Доказательства бывают разные: через формулу биномиальных коэффициентов, индукцию, бином Ньютона. Обычно больше всего ценятся комбинаторные доказательства

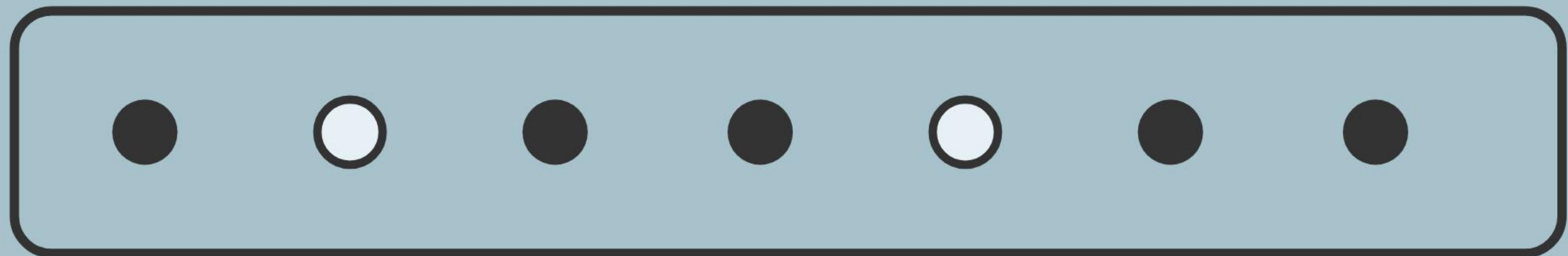
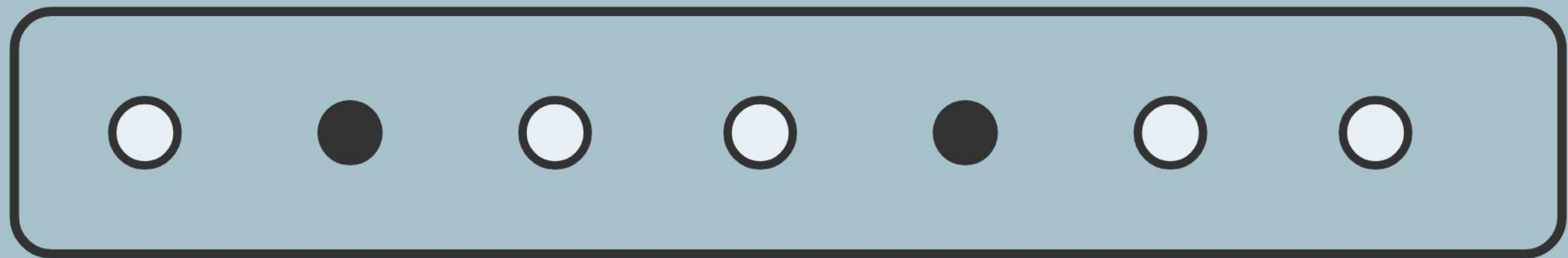
**Комбинаторным доказательством** называется доказательство, в котором устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами  $X$  и  $Y$ , отвечающими левой и правой частям тождества

# ТРИ БИЕКЦИИ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \cdot \quad \sum_k \binom{n}{k} = \quad \cdot \quad \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{l} =$$

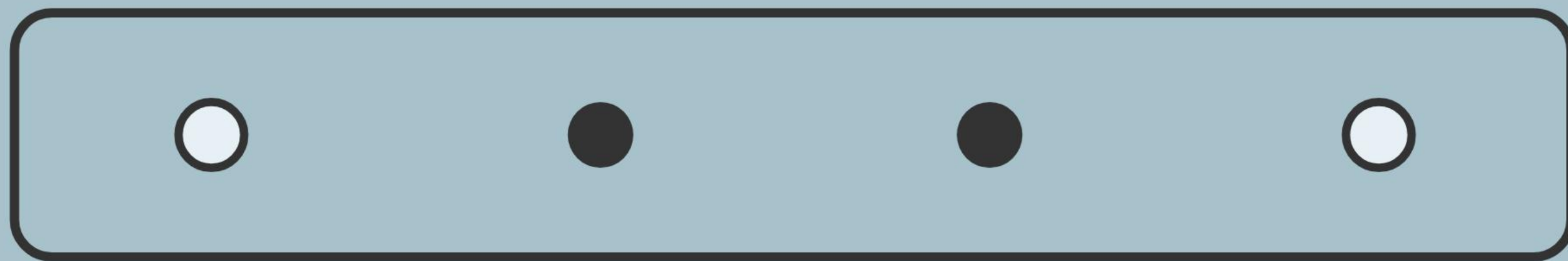
# ТРИ БИЕКЦИИ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \cdot \quad \sum_k \binom{n}{k} = \quad \cdot \quad \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{l} =$$



# ТРИ БИЕКЦИИ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \cdot \quad \sum_k \binom{n}{k} = 2^n \quad \cdot \quad \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{l} =$$



0

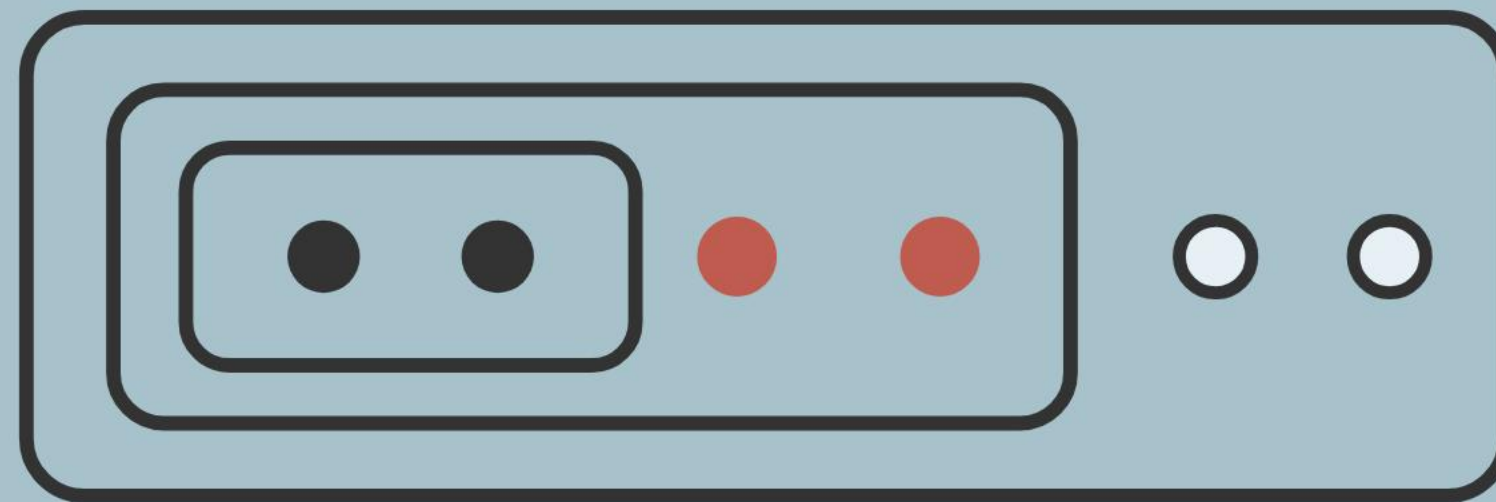
1

1

0

# ТРИ БИЕКЦИИ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \cdot \quad \sum_k \binom{n}{k} = 2^n \quad \cdot \quad \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{l} = 3^n$$



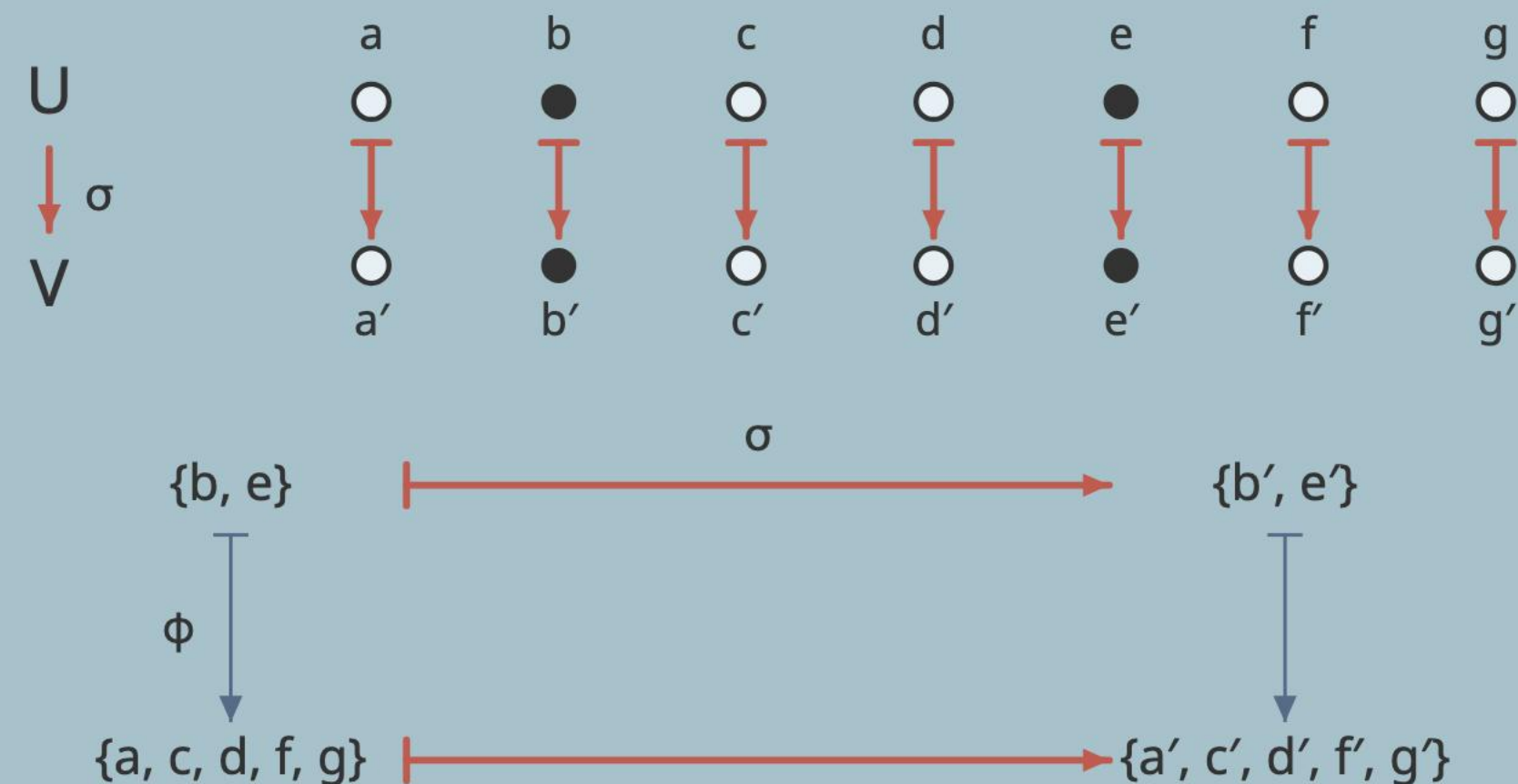
|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| ● | ● | ● | ● | ○ | ○ |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# ПОЧЕМУ ЭТО КРАСИВО

Описанные операции сохраняются при переименовании элементов

Свойства биекции  $S \mapsto U \setminus S$

- переименование  $\sigma: U \rightarrow V$  переводит дополнение в дополнение;
- переименовать и взять дополнение — то же самое, что взять дополнение и переименовать



# КОМБИНАТОРНЫЕ ВИДЫ

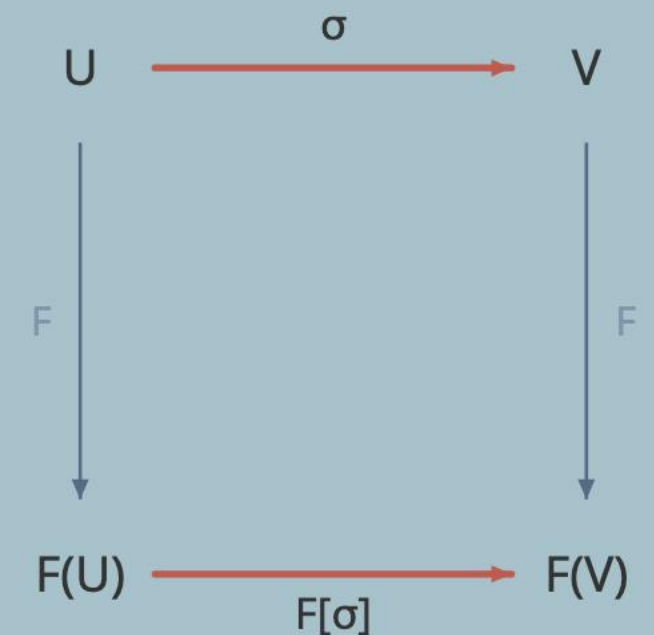
Давайте попробуем понять, какие свойства структур мы видели в предыдущих примерах

**Комбинаторный вид  $F$ :**

- конечному множеству  $U$  отвечает множество  $F(U)$ ;
- биекции  $\sigma: U \rightarrow V$  вид  $F$  **сопоставляет** биекцию  $F[\sigma]: F(U) \rightarrow F(V)$ ;
- $F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]$

$F$  — это множество структур на  $U$  специального вида; если  $\sigma$  — переименование элементов  $U$ , то структуры тоже можно переименовать

Это свойство называется **функториальностью**

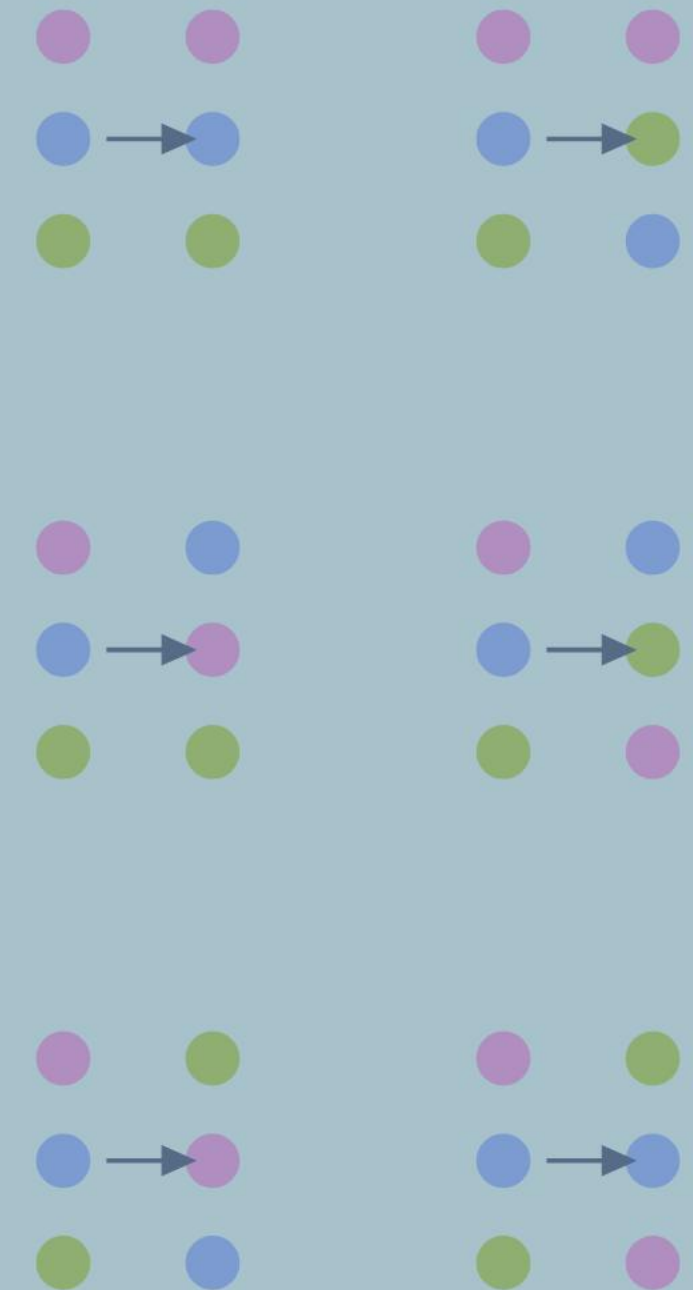


# ПРИМЕРЫ

## Примеры видов

- линейные порядки;
- циклические порядки;
- перестановки;
- беспорядки;
- инволюции (перестановки с  $\pi^2 = \text{id}$ );
- подмножества  $E(U)$  и  $k$ -подмножества  $E_k(U)$ ;
- разбиения на блоки;
- графы, деревья и корневые деревья с вершинами  $U$ ;
- бывают инъекции, бывают ещё сюръекции — это и то, и то виды

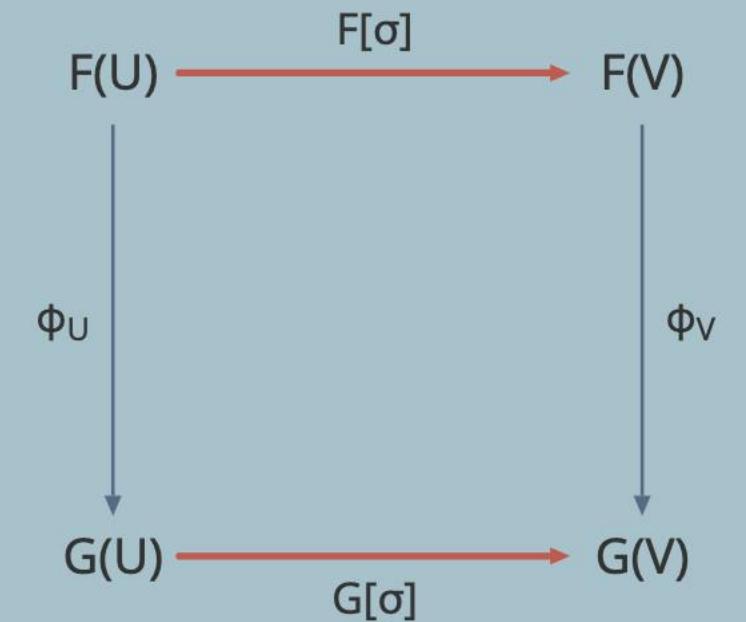
При переименовании элементов  $U$  переименовываются и объекты каждого из этих множеств



# ЕСТЕСТВЕННЫЙ ИЗОМОРФИЗМ

**Естественный изоморфизм**  $\varphi: F \rightarrow G$  — семейство биекций  $\varphi_U: F(U) \rightarrow G(U)$ , согласованное со всякой биекцией  $\sigma: U \rightarrow V$ :

$$\varphi_V \circ F[\sigma] = G[\sigma] \circ \varphi_U$$



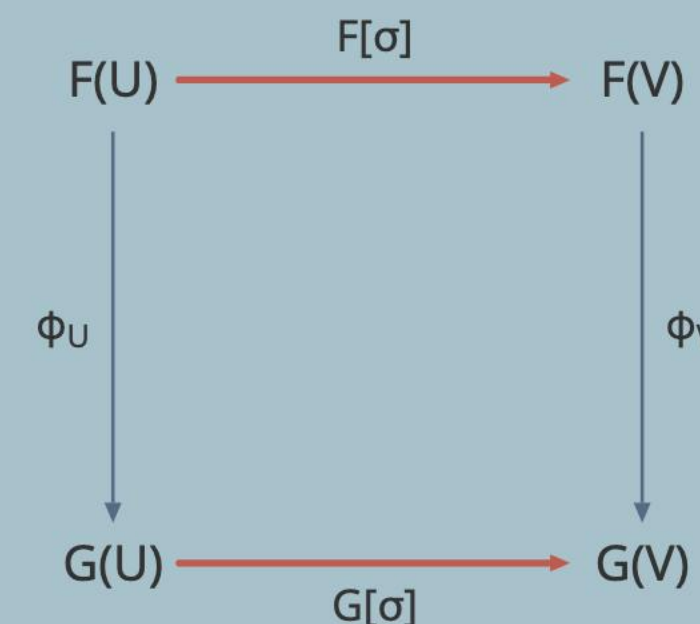
# ЕСТЕСТВЕННЫЙ ИЗОМОРФИЗМ

**Естественный изоморфизм**  $\varphi: F \rightarrow G$  — семейство биекций  $\varphi_U: F(U) \rightarrow G(U)$ , согласованное со всякой биекцией  $\sigma: U \rightarrow V$ :

$$\varphi_V \circ F[\sigma] = G[\sigma] \circ \varphi_U$$

Доказательство тождества  $|F(U)| = |G(U)|$  **красиво**, когда предъявлено такое семейство, а не отдельная биекция при каждом  $U$

Какие из выписанных в начале тождеств — изоморфизмы видов?



# ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1)$$

Число чётных подмножеств такое же, как число нечётных:  $|E^+| = |E^-|$

Есть биекция  $S \mapsto S \triangle \{x_0\}$ : она добавляет или убирает  $x_0$

# ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1)$$

Число чётных подмножеств такое же, как число нечётных:  $|E^+| = |E^-|$

Есть биекция  $S \mapsto S \triangle \{x_0\}$ : она добавляет или убирает  $x_0$

Но это не изоморфизм видов: переименование не сохраняет  $x_0$

# ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1)$$

Число чётных подмножеств такое же, как число нечётных:  $|E^+| = |E^-|$

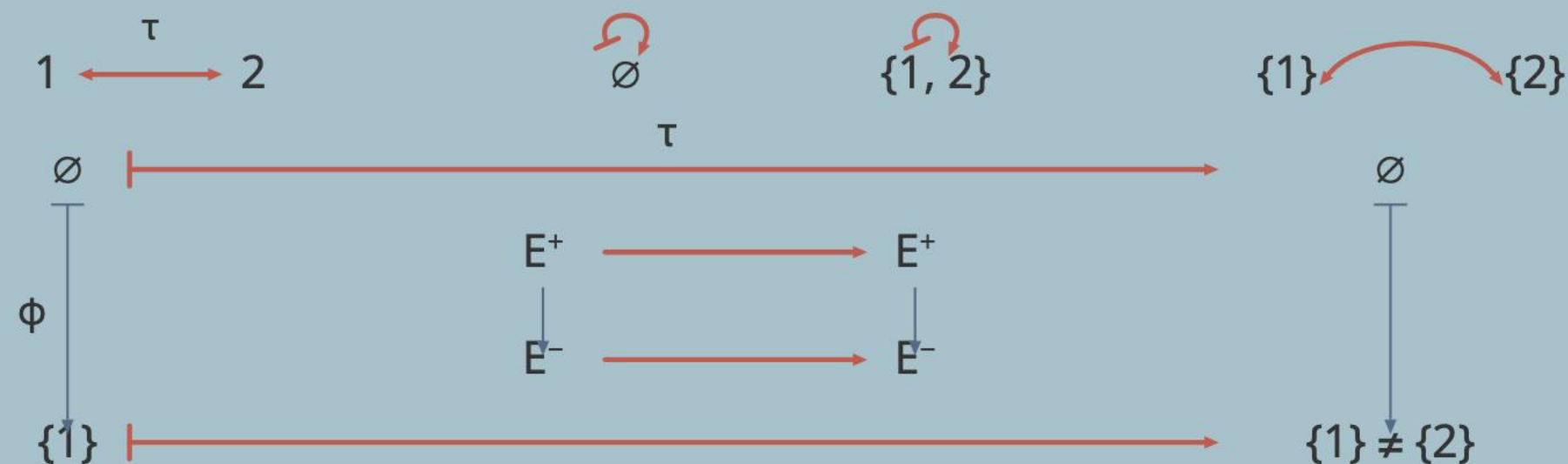
Есть биекция  $S \mapsto S \triangle \{x_0\}$ : она добавляет или убирает  $x_0$

Но это не изоморфизм видов: переименование не сохраняет  $x_0$

## УПРАЖНЕНИЕ

$E^+$  и  $E^-$

- не изоморфны при чётном числе элементов;
- изоморфны при нечётном



# ОТМЕЧЕННЫЕ ВИДЫ

Как вывести из изоморфизма видов тождество Паскаля?

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

# ОТМЕЧЕННЫЕ ВИДЫ

Как вывести из изоморфизма видов тождество Паскаля?

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Чтобы придумать комбинаторные виды, для которых число элементов равно  $\binom{n-1}{k-1}$ ,  $\binom{n-1}{k}$ , добавим дополнительную структуру:

- **отмеченное множество**  $(U, *)$  — множество и фиксированный элемент;
- **биекция отмеченных множеств**  $U_* \rightarrow V_*$  — биекция множеств, сохраняющая отмеченный элемент;
- **отмеченный вид** — **функтор** из отмеченных множеств в множества

# ОТМЕЧЕННЫЕ ВИДЫ

Как вывести из изоморфизма видов тождество Паскаля?

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Чтобы придумать комбинаторные виды, для которых число элементов равно  $\binom{n-1}{k-1}$ ,  $\binom{n-1}{k}$ , добавим дополнительную структуру:

- **отмеченное множество**  $(U, *)$  — множество и фиксированный элемент;
- **биекция отмеченных множеств**  $U_* \rightarrow V_*$  — биекция множеств, сохраняющая отмеченный элемент;
- **отмеченный вид** — **функтор** из отмеченных множеств в множества

Отображение  $S \mapsto S \triangle *$  задаёт изоморфизм отмеченных видов  $E^+$ ,  $E^-$

# ОТМЕЧЕННЫЕ ВИДЫ

Как вывести из изоморфизма видов тождество Паскаля?

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Чтобы придумать комбинаторные виды, для которых число элементов равно  $\binom{n-1}{k-1}$ ,  $\binom{n-1}{k}$ , добавим дополнительную структуру:

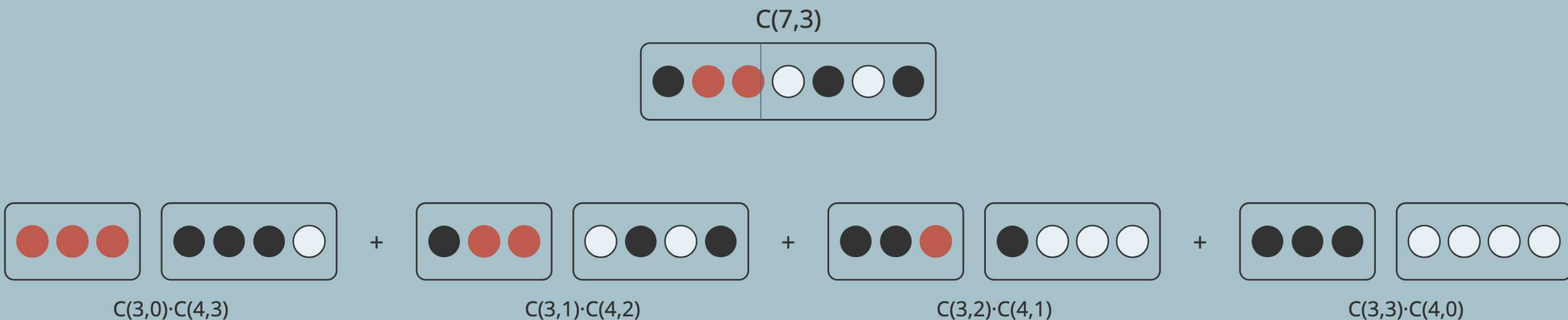
- **отмеченное множество**  $(U, *)$  — множество и фиксированный элемент;
- **биекция отмеченных множеств**  $U_* \rightarrow V_*$  — биекция множеств, сохраняющая отмеченный элемент;
- **отмеченный вид — функтор** из отмеченных множеств в множества

Отображение  $S \mapsto S \triangle *$  задаёт изоморфизм отмеченных видов  $E^+$ ,  $E^-$

Рассмотрим отмеченный вид  $k$ -подмножеств, содержащих и не содержащих отмеченную точку, — это сразу даёт тождество Паскаля

# ПОКРАШЕННЫЕ ВИДЫ

Как доказать тождество Вандермонда  $\binom{m+n}{k} = \sum_r \binom{m}{r} \binom{n}{k-r}$  комбинаторно?

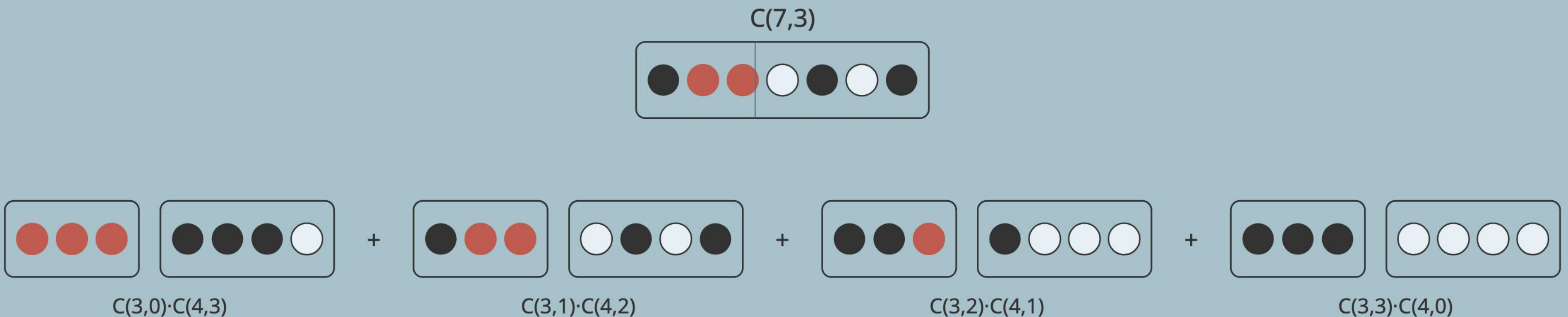


# ПОКРАШЕННЫЕ ВИДЫ

Как доказать тождество Вандермонда  $\binom{m+n}{k} = \sum_r \binom{m}{r} \binom{n}{k-r}$  комбинаторно?

Введём дополнительную структуру:

- **покращенное множество**  $(M, N)$  — пара множеств;
- **биекция покрашенных множеств** — биекция множеств, сохраняющая цвет;
- **покращенный вид** — функтор из покрашенных множеств в множества



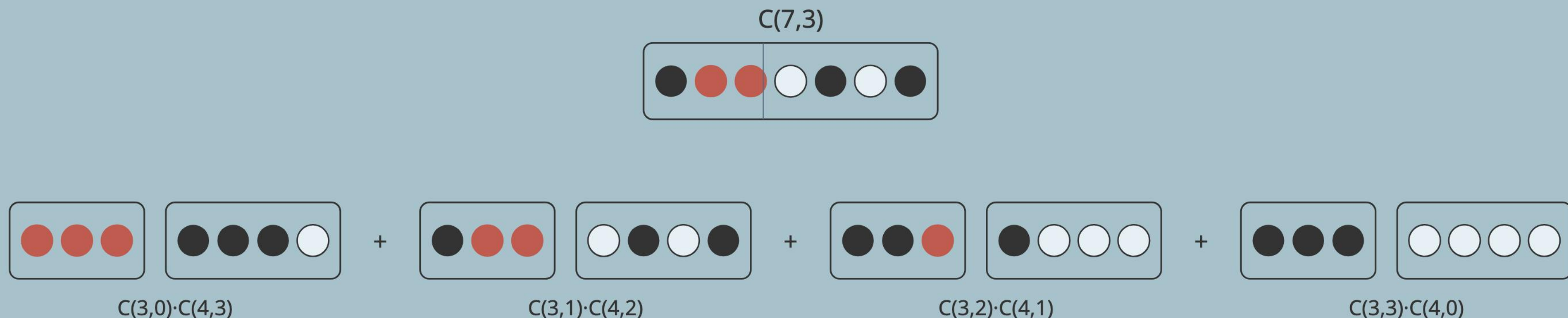
# ПОКРАШЕННЫЕ ВИДЫ

Как доказать тождество Вандермонда  $\binom{m+n}{k} = \sum_r \binom{m}{r} \binom{n}{k-r}$  комбинаторно?

Введём дополнительную структуру:

- **покращенное множество**  $(M, N)$  — пара множеств;
- **биекция покрашенных множеств** — биекция множеств, сохраняющая цвет;
- **покращенный вид** — **функтор** из покрашенных множеств в множества

Вид подмножеств объединения  $M$  и  $N$  даёт тождество Вандермонда



# КАТЕГОРИИ

**Категория  $\mathcal{C}$**  состоит из:

- класса объектов  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- множества морфизмов  $\mathcal{C}(A, B)$  между парой объектов  $A$  и  $B$  из  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- композиции  $\circ: \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$  и единицы  $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ , для которых выполняются аксиомы

# КАТЕГОРИИ

**Категория  $\mathcal{C}$**  состоит из:

- класса объектов  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- множества морфизмов  $\mathcal{C}(A, B)$  между парой объектов  $A$  и  $B$  из  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- композиции  $\circ: \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$  и единицы  $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ , для которых выполняются аксиомы

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad 1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

# КАТЕГОРИИ

**Категория  $\mathcal{C}$**  состоит из:

- класса объектов  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- множества морфизмов  $\mathcal{C}(A, B)$  между парой объектов  $A$  и  $B$  из  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- композиции  $\circ: \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$  и единицы  $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ , для которых выполняются аксиомы

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad 1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

**Функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$**  состоит из:

- отображения объектов  $\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$ ;
- отображений морфизмов  $\mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(FA, FB)$ , для которых  $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$  и  $F1_A = 1_{FA}$

Конечные множества и биекции образуют категорию; отмеченные и покрашенные множества — тоже. Комбинаторный вид — функтор из этих категорий в категорию множеств

# ИТОГ

- понятие комбинаторного доказательства получило точную формулировку — **изоморфизм комбинаторных видов**;

# ИТОГ

- понятие комбинаторного доказательства получило точную формулировку — **изоморфизм комбинаторных видов**;
- при этом понятие комбинаторного вида пришлось трактовать в разных ситуациях по-разному;

# ИТОГ

- понятие комбинаторного доказательства получило точную формулировку — **изоморфизм комбинаторных видов**;
- при этом понятие комбинаторного вида пришлось трактовать в разных ситуациях по-разному;
- тождества можно искать, не только проверять: изоморфизм видов — это такое сильное условие, которое помогает находить объект;

# ИТОГ

- понятие комбинаторного доказательства получило точную формулировку — **изоморфизм комбинаторных видов**;
- при этом понятие комбинаторного вида пришлось трактовать в разных ситуациях по-разному;
- тождества можно искать, не только проверять: изоморфизм видов — это такое сильное условие, которое помогает находить объект;
- невозможность и единственность стали теоремами; дальше — классификация самих видов

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ